MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

HUSZONKETTEDIK ÉVFOLYAM

I., II., III. FÜZET 1913 JAN.—FEBR.—MÁRCZ.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1913.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszonegyedik társulati év 1912 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* egyet. magántanár (VII., Ilka-u. 32.) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivőtitkár czimére **VIII., Múzeum-körút 6.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czímük alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HUSZONKETTEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1913

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONKETTEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első, második és harmadik füzet.

Negyedik és ötödik füzet.

Hatodik, hetedik és nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Társulati ügyek. Tanulóverseny.

A LINEÁRIS CSOPORTOK ELMÉLETÉHEZ.

A matematikai kutatásokban a lineáris csoportoknak jutott fontos szerep teljesen indokolja azt az érdeklődést, melyet JORDAN-tól[1] kezdve DICKSON-ig[2] a matematikusok a lineáris csoportok elmélete iránt tanúsítottak. Habár ez az érdeklődés sok szép fejtegetésnek lett a kútforrásává, azért — úgy hiszem — azoknak gazdagítása a következő sorokkal épen nem válik fölöslegessé, a mennyiben az elmélet alapjainak megszilárdítása egy új módszerrel — az *elemi osztók* segitségével — csak javára válhatik azoknak a kutatásoknak, melyek ezen a téren folyamatban vannak.

1. Definicziók.

Az $X_{x_1 \dots x_n}$ *határozatlanok száma*, ha *az indexek egymástól függetlenül* egy (mod. m) *teljes maradék-rendszer minden értékét fölveszik*: m^n.

Az $x_1, \dots, x_n$ *minden szubsztituczióján̈ak megfelel az* $X_{x_1 \dots x_m}$ *elemeknek egy, de csakis egy szubsztitucziója.*

Ha az $(x_1, \dots, x_n)$ halmaz m^n értékrendszerét (mod. m) a $[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)]$ halmaz is bizonyos sorrendben fölveszi, akkor az

$$s = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) & \dots & \varphi_n(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix} (\text{mod. } m) \qquad (1)$$

---

[1] JORDAN, Traité de substitutions et des équations algebriques, 1870.
[2] DICKSON, Linear groups with an exposition of the Galois field theory. 1901.

szubsztitucczióval teljesen jellemeztük az $X_{x_1} \ldots {}_{x_n}$ elemek megfelelő szubsztituczióit.

Az s szubsztituczíót még így is szokás jelölni:

$$s = [x_1, \ldots, x_n; \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)] \text{ mod. } m). \quad (2)$$

Ha pedig kétértelműség nem forog fenn, akkor vagy az

$$s = \begin{pmatrix} x_i \\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \text{ (mod. } m), \qquad (1')$$

vagy pedig az

$$s = x'_i \equiv \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \text{ (mod. } m) \qquad (2')$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

szimbolumot használjuk.

Pl. Az

$$s(a) = x'_i \equiv x_i + a_i \text{ (mod. } m)$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

szubsztituczíók, ha az a-k egymástól függetlenül (mod. m) minden értéket felvesznek egy m^n fokú, m^n rendű tranzitiv ÁBEL-féle csoportot alkotnak.

Ha

$$s_i = \left.\begin{matrix} x'_i \equiv x_i + 1 \\ x'_k \equiv x_k \\ i \pm k, \end{matrix}\right\} \text{ (mod. } m),$$

akkor

$$s(a) = s_1^{a_1} \ldots s_n^{a_n}$$

következőleg az $s(a)$-k alkotta ÁBEL-féle csoport n-ed rangú; ezt a csoportot *aritmetikai csoportnak* nevezzük.

2. A lineáris csoport fogalma.

Határozzuk meg azt a legáltalánosabb csoportot, mely az aritmetikai csoportot invariansul hagyja.

Legyen ennek a csoportnak egyik szubsztituczíója az előbbi fejezet (1) alatt levő szubsztituczíója s. Mivel $s^{-1} s_1 s$ föltevésünk értelmében meg van az aritmetikai csoportban, azért

$$s^{-1}s_1\, s = \begin{pmatrix} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi_i(x_1+1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + a_{i1} \end{pmatrix} \pmod{m},$$

következőleg

$$\varphi_i(x_1+1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + a_{i1},$$

épen így

$$\varphi_i(x_1, x_2+1, \ldots, x_n) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + a_{i2},$$

$$\vdots$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n+1) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + a_{in}.$$

Ezekből a redukcziós képletekből, ha a $\varphi_i(0, \ldots, 0)$ konstanst a_i-vel jelöljük, $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ számára a következő analitikai alakot nyerjük:

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = a_i + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Ennélfogva az aritmetikai csoportot az összes

$$s = x_i' \equiv a_i + a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \pmod{m}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

szubsztitucziók invariansul hagyják. Miként könnyű belátni, ezek a szubsztitucziók egy m^n fokú csoportot alkotnak, melyet *lineáris csoportnak* nevezünk.

Az

$$s\, s^{-1}(a) = x_i' = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \pmod{m}$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

szubsztitucziók a lineáris csoport egyik alcsoportját képezik, melyet *homogen lineáris csoportnak* nevezünk. Ennélfogva: *Az a maximális csoport, mely az aritmetikai csoportot invariansul hagyja, a lineáris csoport; az a maximális, az aritmetikai csoporton kívül álló csoport pedig, mely az aritmetikai csoportot invariansul hagyja, a homogén lineáris csoport.*

3. A homogén lineáris csoport elemi szubsztitucziói.

Az

$$\left.\begin{array}{l} s(i,\ 1) = x'_i \equiv x_i + x_1,\ x'_k \equiv x_k \\ s(1,\ i) = x'_1 \equiv x_1 + x_i,\ x'_k \equiv x_k \end{array}\right\} \text{(mod. } m) \qquad {\scriptstyle (i \neq 1)}$$

szubsztitucziókat a homogen lineáris csoport elemi szubsztituczióinak nevezzük.

Könnyű belátni, hogy

$$\left.\begin{array}{l} s^{-1}(i,\ 1) = x'_i \equiv x_i - x_1,\ x'_k \equiv x_k \\ s^{-1}(1,\ i) = x'_1 \equiv x_1 - x_i,\ x'_k \equiv x_k \end{array}\right\} \text{(mod. } m) \qquad {\scriptstyle (i \neq 1,}$$

$$s^{-1}(i, 1),\ s(1,k)\ s(i, 1) s^{-1}(1,k) = s(i,k) = x'_i \equiv x_i + x_k,\ x'_l \equiv x_l \ \text{(mod. } m)$$
$${\scriptstyle (i \neq k)}$$

$$s^{a}(i,\ k) = x'_i \equiv x_i + a x_k,\ x'_l \equiv x_l \ \text{(mod. } m) \qquad {\scriptstyle (i \neq k}$$

bármily pozitiv, vagy negativ egész szám legyen is a.

4. Az elemi szubsztitucziókkal való szorzás szabályai.

Ha s_a-nak, illetőleg s_b-nek nevezzük azokat a szubsztitucziókat, melyeknek matrixai rendre:

$$a = \| a_{i1} \cdots a_{in} \|,$$
$$b = \| b_{i1} \cdots b_{in} \|,$$
$${\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}$$

akkor a szubsztitucziók szorzási szabálya szerint:

$$s_a\, s_b = s_c,$$

ha

$$c = \| c_{i1} \cdots c_{in} \|,$$
$${\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}$$

$$c_{ik} = b_{i1} a_{1k} + b_{in} a_{nk}.$$

1. Pl. Az

$$s_a\, s(1,\ i) = s_c$$

szubsztituczió matrixa

$$\begin{Vmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1k}+a_{ik} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{Vmatrix}$$

2. Pl. Az

$$s(1, i)\, s_a = s_c$$

szubsztituczió matrixa

$$\| c_{k1} \dots c_{ki-1}\, c_{ki}\, c_{ki+1} \dots c_{kn} \| =$$
$$= \| a_{k1} \dots a_{ki-1}\, a_{ki}+a_{k1}\, a_{ki+1} \dots a_{kn} \|.$$

Általában az $s_a\, s(i, k)$ matrixát az a-ból úgy nyerjük, ha az i-edik sorhoz hozzáadjuk a k-adikat: az $s(i, k)\, s_a$ matrixát pedig az a-ból úgy kapjuk, ha a k-adik oszlopához hozzáadjuk az i-ediket.

Ha tehát az a matrix egyik sorának illetőleg oszlopának ε-szorosát hozzáadjuk egy másik sor-, illetőleg oszlophoz, akkor nem teszünk mást, mint s_a-t szorozzuk jobbról-, illetőleg balról egy elemi subsztituczió ε-adik hatványával.

5. A homogen lineáris csoport szubsztituczióinak redukcziója.

Az előbbi fejezet fejtegetései szerint elemi szubsztitucziókkal szorzunk, midőn az a matrixszal a következő műveleteket végezzük:

1. Ha a_{ik} az a matrix abszolút értékére nézve legkisebb — mindig zérustól különbözőt értve — eleme, akkor az i-edik sor megfelelő többszörösének a többi sorhoz való hozzáadásával elérhetjük, hogy az így transzformált matrix k-adik oszlopában a_{ik}-nál abszolút értékre nézve csak kisebb elemek forduljanak elő.

2. Megfelelő művelettel elérhetjük, hogy a matrix i-edik sorának elemei is abszolút értékre nézve kisebbek legyenek a_{ik}-nál.

3. Az így transzformált matrixra alkalmazzuk újból az imént

leírt műveletet s ezt folytassuk addig, míg egy oly matrixhoz nem jutunk, melynek abszolút értékre nézve legkisebb elemének sorában és oszlopában minden más elem zérus.

4. Ha valamelyik sorban van olyan elem, melyben a legkisebb elem nem foglaltatik maradék nélkül, akkor ezt a sort adjuk a legkisebb elem sorához s azután kezdjük ismét elölről leírtuk a műveletet.

5. Ha végre eljutunk egy oly matrixhoz, melynek abszolút értékre nézve legkisebb elemének sorában és oszlopában minden más elem zérus és ez a legkisebb elem a matrix minden más elemében maradék nélkül foglaltatik, akkor a legkisebb elem sorát adjuk a matrix legelső sorához s aztán oszlopának annyiszorosát adjuk az első oszlophoz; hogy ezáltal az első elem pozitív legyen s egyenlő legyen az abszolút értékre nézve legkisebb elem abszolút értékével.

6. Miután az 1. és 2. pontban leírt eljárással az első sor- és oszlopnak is minden elemét, a legelsőt leszámítva, zérussá tettük, matrixunk ily alakú lesz:

$$\left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{matrix} \right\|$$

Ha már most a leírtuk műveletet alkalmazzuk az

$$\| a'_{i2} \ldots a'_{in} \| \quad {\scriptstyle (i=2\ldots, n)}$$

matrixra, akkor világos, hogy műveletsorozatuk végén matrixunk ilyen alakúvá lesz:

$$e = \left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & e_n \end{matrix} \right\|$$

Ennélfogva az elemi szubsztitucziókból elő tudunk állítani oly szorzatokat σ_1-t és σ_2-t, melyekre nézve

$$\sigma_1 s_a \sigma_2 = s_e = x_i \equiv e_i x_i \ (\mathrm{mod.}\ m). \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}$$

De $e_i x_i$ (mod m) minden értéket csak úgy vehet fel, ha

$$(e_i, m) = 1.$$

Ennélfogva s_a *csak úgy lehet valóságos szubsztituczió, ha a elemi osztói m-hez viszonylagos törzsszámok, azaz ha*

$$(e_1 \ldots e_n, m) = 1.$$

Ha a matrix determinánsát röviden $|a|$-val jelöljük, akkor világos, hogy

$$|a||b| = |c|.$$

Következőleg

$$|a| = |e|.$$

Föntebbi tételünket tehát így is fogalmazhatjuk:

s_a *csak úgy lehet valóságos szubsztituczió, ha determinansa* $|a|$ *és* m *viszonylagos törzsszámok.*

6. Az s_e szubsztitucziók transzformálása.

Legyenek y_1, y_2, y_3, y_4 (mod. m) még egyelőre határozatlan számok. Könnyű meggyőződni, hogy az

$$s_e\, s^{y_1}(1, 2)\, s^{y_2}(2, 1)\, s^{y_3}(1, 2)\, s^{y_4}(2, 1)$$

szubsztituczió megegyezik a következővel:

$$x_1' \equiv e_1(1+y_2y_3)x_1 + e_2[y_1(1+y_2y_3)+y_3]x_2$$

$$x_2' \equiv e_1[y_4(1+y_2y_3)+y_2]x_1 + e_2\{y_4[y_1(1+y_2y_3)+y_3]+1+y_1y_2\}x_2$$

$$x_i' \equiv e_i x_i$$

Ha már most azt az

$$s^{y_1}(1, 2)\, s^{y_2}(2, 1)\, s^{y_3}(1, 2)\, s^{y_4}(2. 1)$$

szubsztitucziót, melyet az

$$y_2y_3 \equiv e_2 - 1$$
$$y_3 \equiv -e_2y_1 \pmod{m}$$
$$y_2 \equiv -e_2y_4$$

feltételeknek megfelelően konstruálunk $s(1, 2; e_2)$*-nek nevezzük, akkor*

$$s_e s(1, 2; e_2) = x'_1 \equiv e_1 e_2 x_1$$
$$x'_2 \equiv x_2$$
$$x'_i \equiv e_i x_i,$$

tehát

$$s_e s(1, 2; e_2) s(1, 3; e_3) \ldots s(1, n; e_n) = x'_1 \equiv e_1 \ldots e_n x_1$$
$$x'_i \equiv x_i.$$

Ha tehát az s_a subsztituczió determinansát d-nek nevezzük, akkor:

Mindig elő tudunk állítani az elemi szubsztituicziókból oly σ' és σ'' szorzatokat, melyekre nézve:

$$\sigma' s_a \sigma'' = x'_1 \equiv dx_1,\ x'_i \equiv x_i \text{ (mod. } m).$$

Ha

$$d \equiv 1 \text{ (mod. } m),$$

akkor

$$s_a = \sigma'^{-1} \sigma''^{-2} = \sigma,$$

azaz: *minden (mod. m) egységdeterminansú szubsztituczió előállítható, mint az elemi szubsztitucziók szorzata.*

Ha s_a egy tetszőleges oly szubsztituczió, melynek determinansa d és

$$s = x'_1 = dx_1,\ x'_i = x_i \text{ (mod. } m),$$

akkor ss_a^{-1} determinansa 1, tehát

$$ss_a^{-1} = \sigma$$
$$s = \sigma s_a$$

tehát minden s_a szubsztituczióhoz meghatározható oly elemi szubsztitucziókból előállított szorzat σ, melyre nézve

$$\sigma s_a = x'_1 \equiv \mathrm{d}x_1,\ x'_i \equiv x_i,$$

vagy

$$s_a \sigma = x''_1 \equiv dx_1,\ x'_i \equiv x_i.$$

7. A homogen lineáris csoport konstrukcziója.

Ha az

$$x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

kongruencziának egyik primitiv gyöke d, és

$$s = x_1' \equiv dx_1, x_i' \equiv x_i,$$

akkor minden s_a subsztituczióhoz meghatározhatunk oly a számot, melyre nézve

$$s_a s^{-a} = \sigma,$$

hol σ-nak az előbbi fejezetben megállapitott jelentése van, következőleg:

$$s_a = \sigma s^a.$$

Ha tehát a homogen lineáris csoportot G-vel jelöljük, akkor

$$G = \{s(1, i), s(i, 1); s\}.$$

Mivel $s^{-1}s(i, k)s \pmod{m}$ egységdeterminansú szubstituczió, azért *a*

$$\Gamma = \{s(1, i), s(i, 1)\}$$

csoport G-nek invarians alcsoportja, tehát

$$G = \Gamma, \Gamma s, \ldots, \Gamma s^{\varphi(m)-1}$$
$$= \Gamma, s\Gamma, \ldots, s^{\varphi(m)-1}\Gamma.$$

8. A homogen lineáris csoport rendszáma.

Ha G-nek azt az alcsoportját, mely x_1-et invariansul hagyja, G_1-nek nevezzük, akkor

$$G = G_1, G_1 g_2, \ldots, G_1 g_\nu.$$

A g-k x_1 különbözőképen transzformálják, mert ha g_i és g_k egyformán transzformálná, akkor $g_i g_k^{-1}$ invariansul hagyná; de ekkor $g_i g_k^{-1}$ tagja lenne G_1-nek, tehát g_i a $G_1 g_k$ halmazban is előfordulna, a mi nem lehetséges.

Ha $a_{11}, \ldots, a_{1n}$ relativ törzsszám m-hez, azaz

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, m) = 1,$$

akkor van oly szubsztituczió, mely az x_1-et $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$-be transzformálja.

Már most ha $\varphi(m, n)$-nel jelöljük azt a számot, mely megmondja, hogy az $0, 1, \ldots, m-1$ számok közül hányféleképen választhatunk ki oly $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$ halmazokat, melyekre nézve

$$(a_{11}, \ldots, a_{1n}, m) = 1,$$

akkor

$$\nu = \varphi(m, n).$$

Legyen

$$m = p_1^{a_1} \ldots p_{a_s}$$

mivel a $0, 1, 1, \ldots, m-1$ számokból kiválasztható m^n különböző $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$ halmaz között

$$\left(\frac{m}{p_1 \ldots p_r}\right)^n$$

olyan fordul elő, melyek mindegyikének tagjai oszthatók $p_1 \ldots p_r$-rel, melyeket röviden $p_1 \ldots p_r$-rel osztható halmaznak mondunk s mivel a $\sum \left(\frac{m}{p_1}\right)^n$ halmaz között a $p_1 \ldots p_r$-rel oszthatók mindegyike $\binom{r}{1}$-szer fordul elő, a $\sum \left(\frac{m}{p_1 p_2}\right)^n$ halmazsokaságban minden $p_1 \ldots p_r$-rel osztható halmaz $\binom{r}{2}$-ször fordul elő stb., azért az

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \cdots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r} = 1$$

képlet figyelembe vételével könnyű belátni, hogy

$$\varphi(m, n) = m^n - \sum \left(\frac{m}{p_1}\right)^n + \sum \left(\frac{m}{p_1 p_2}\right)^n \cdots = m^n \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i^n}\right).$$

Mivel G rendszáma, melyet $R(m, n)$-nel jelölünk, ν-nek és

G_1 rendszámának a szorzata, azért még ez utóbbit kell meghatároznunk.

G_1 bármely szubsztitucziója ily alakú:

$$x'_1 \equiv x_1, \; x'_i \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \pmod{m}, \quad {\scriptstyle (i=2,\ldots,n)}$$

hol a (mod. m) tetszőleges $(a_{21}, \ldots, a_{n1})$ halmazok száma m^{n-1}, az

$$(|a_{ik}|, m) = 1 \quad {\scriptstyle (i,\, k=2,\ldots,n)}$$

föltételt kielégítő

$$\|a_{i2}, \ldots, a_{in}\| \quad {\scriptstyle (i=2,\ldots,n)}$$

matrixok száma pedig $R(m, n-1)$; következőleg G_1 rendszáma $m^{n-1}R(m, n-1)$, ennélfogva:

a homogen lineáris csoportunk rendszáma

$$R(m, n) = m^{n-1}\varphi(m, n)\, R(m, n-1),$$

hol

$$R(m, 1) = \varphi(m, 1) = \varphi(m).$$

Ezt a tételt ily általánosságban először JORDAN[1] mutatta ki. Az $m = p$-re vonatkozó s GALOIS által fölfedezett

$$R(p, n) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{r=1}^{n} (p^r - 1)$$

tételt először BETTI igazolja.

Mivel m és n a csoportra nézve jellemző számok, azért ezután a homogen lineáris csoportot rendszáma után $R(m, n)$ csoportnak fogjuk nevezni.

9. A kompoziczió sor képzési módja.

Ha $p_1, \ldots, p_r$ törzsszámok és

$$m_1 = p_1^{\alpha_1}, \; m_2 = p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha}.$$

$$m = m_1 m_2,$$

---

[1] JORDAN, Traité p. 95.

akkor, ha az $R(m, n)$ csoport minden szubsztitucziójához

$$s = x_1' \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \pmod{m}$$

mellé rendelünk egy

$$\sigma = x_1' \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \pmod{m_1}$$

szubsztitucziót, akkor világos, hogy a σ-k oly $R(m_1, n)$ csoportot alkotnak, mely $R(m, n)$-nel izomorfizmusban van, $R(m_1, n)$ csoport egységének $R(m, n)$-ben megfelelnek az

$$s_1 = x_i' \equiv x_i + m_1(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) \pmod{m}$$

szubsztitucziók, melyek $R(m, n)$-nek egyik invarians alcsoportját alkotják.

Mivel az

$$1 = \nu m_1 + \mu m_2$$

relácziónál fogva

$$s_1 = x_i' = \mu m_2 x_i + m_1\left(a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii} + \nu)x_i + \cdots + a_{in}x_n\right) \pmod{m},$$

azért s_1 determinánsa akkor s csakis akkor relativ törzsszám m-hez, ha

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11} + \nu \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \quad \cdots a_{nn} + \nu \end{vmatrix}, m_2\right) = 1.$$

Ennélfogva az s_1 szubsztitucziók csoportja egyszerű izomorfizmusban van egy oly $R(m_2, n)$ csoporttal, melynek szubsztitucziói

$$s_2 = x_1' \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + (a_{ii} + \nu)x_i + \cdots + a_{in}x_n \pmod{m_2}$$

Ha már most a fönntebbi $R(m_1, n)$ csoport kompoziczió sora

$$\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_i,$$

kompoziczió-tényezői pedig $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$, akkor ezeknek a Γ-áknak $R(m, n)$-ban megfelel a

$$G, G_1, \ldots, G_i$$

sor, mely nem más, mint az $R(m, n)$ kompoziczió-sorának G_i-ig terjedő része, a melynek kompoziczió-tényezői szintén $\gamma_1, \ldots, \gamma_i$ és a melyben G_i egyszerű izomorfizmusban van az imént fölirt $R(m_2, n)$ csoporttal, melynek fölbontására ugyanazt a szabályt kell alkalmaznunk, mint a melyet most alkalmaztunk, az $R(m, n)$ csoport felbontására.

Az $R(m, n)$ csoport felbontása tehát visszavezethető $R(p^\alpha, n)$ felbontására.

10. Az $\mathfrak{R}(p^\alpha, n)$ csoport fölbontása.

Az előbbi fejezet fejtegetéseihez hasonlóan az $R(p^\alpha, n)$ csoport minden szubsztitucziójához

$$s = x_i' \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in} \pmod{p^\alpha}$$

rendeljünk egy

$$\sigma = x_i' \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n x_n \pmod{p}$$

szubsztitucziót ezek egy oly $R(p, n)$ csoportot alkotnak, mely az adottal

$$\frac{R(p^\alpha, n)}{R(p, n)} = p^{(\alpha-1)n^2}$$

rendű izomorfizmusban van.

Ha az $R(p, n)$ csoport kompoziczió-sorának $R(p^\alpha, n)$-ben megfelel a

$$G, G_1, \ldots, G_k$$

sorozat, akkor G_k rendszáma: $p^{(\alpha-1)n^2}$; ennélfogva G_k *már feloldható csoport.*

Az $R(p^\alpha, n)$ csoport felbontása tehát visszavezethető az $R(p, n)$ csoport felbontására.

11. Az $\mathfrak{R}(p, n)$ csoport fölbontása.

Ha csoportunkat röviden G-nek —, a (mod. p) egységdeterminansú szubsztituczióiból alkotott invarians alcsoportját Γ-nak nevezzük, akkor a 7. fejezet fejtegetései értelmében

$$G = \Gamma, \Gamma s, \ldots, \Gamma s^{p-2},$$

hol

$$s = x_1' \equiv dx_1,\ x_i' \equiv x_i \pmod{p},$$

d pedig az

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

kongruencziának egyik primitív gyöke.

Γ-ra vonatkozólag kimutatjuk a következő tételeket:

1. *Ha γ Γ-nak oly szubsztitucziója, melyet Γ invariansul hagy, akkor γ ily alakú:*

$$\gamma = x_i' \equiv gx_i \pmod{p}.$$

Legyen ugyanis

$$\gamma = x_i' \equiv g_{i1}x_1 + \cdots + g_{in}x_n,$$

a Γ egy tetszőleges szubsztitucziója pedig

$$s = x_i' = a_{i1}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Föltevésünk értelmében

$$s\gamma = \gamma s,$$

azaz

$$g_{i1}a_{1k} + \cdots + g_{in}a_{nk} = a_{i1}g_{1k} + \cdots + a_{in}g_{nk}.$$

Így ha

$$s = s(i, k),$$

akkor

$$g_{ii} = g_{kk},\ g_{ri} = 0,\ g_{ks} = 0, \qquad r \neq i,\ k \neq s$$

a mi már tételünket igazolja.

Határozzuk meg most g értékét. Minthogy γ determinansa (mod. p) egy, azért

$$g^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ha tehát az

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenczia egyik primitiv gyöke a és

$$g = a^x,$$

akkor

$$a^{nx} \equiv 1 \pmod{p},$$

tehát

$$nx \equiv 0 \pmod{p-1},$$

honnan, ha n és $p-1$ legnagyobb közös osztóját d-vel jelöljük,

$$x = \frac{p-1}{d}\nu, \quad (\nu=0, 1, \ldots, d-1)$$

ennélfogva:

2. *Γ-nak azon szubsztitucziói, melyeket Γ invariansul hagy egy d-ed rendű*

$$\Gamma_1 = (1, \gamma, \ldots, \gamma^{d-1})$$

invarians csoportot alkotnak, hol

$$d = (n, p-1)$$

$$\gamma = x'_i \equiv a^{\frac{p-1}{d}} x_i \pmod{p}$$

és a az

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

egyik primitiv gyöke.

3. *Ha Γ valamelyik invarians alcsoportja az elemi szubsztitucziók egyikét tartalmazza, akkor az összeesik Γ-val.*

Az általánosság rovása nélkül feltételezhetjük, hogy egy ily invarians alcsoport H tartalmazza az $s(1, 2)$ elemi szubsztituczíót. Mivel

$$s_1 = x'_1 \equiv -x_i,\ x'_i \equiv x_1,\ x'_r \equiv x_r,$$
$$s_2 = x'_2 \equiv -x_k,\ x'_k \equiv x_2,\ x'_r \equiv x_r$$

egységszubsztitucziók, azért H tartalmazza az

$$s_1^{-1} s(1, 2) s_1 = s(i, 2),$$
$$s_2^{-1} s(i, 2) s_2 = s(i, k)$$

szubstituczíókat is, a mivel tételünket igazoltuk.

4. *Γ minden oly invarians alcsoportja, mely a Γ_1 csoporton kívül levő szubsztitucziókat is tartalmaz, összeesik Γ-val, ha $n>2$, vagy ha $n=2$, de $p>3$.*

Legyen ugyanis H egy oly invarians alcsoport, melyben van oly

$$s = x_i' \equiv a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

szubsztituczió, mely Γ_1-ben nem fordul elő, akkor világos, hogy van oly elemi szubsztituczió — mondjuk $s(1, 2)$, mely s-et nem hagyja invariansul, következőleg az

$$s^{-1}s^{-1}(1, 2)ss(1, 2) = s_1 = x_1' \equiv a_{11}'x_1 + \cdots + a_{1n}'x_n, \; x_i' \equiv x_i - a_{i1}X_2.$$

hol X_2 avval a lineáris függvénynyel helyettesitendő, a melybe s^{-1} x_2-t transzformálja, oly szubsztituczió, mely az identitástól föltétlenül különbözik. Ha tehát.

$$a_{i1}' \equiv 0, \quad {\scriptstyle (i=2, \ldots, n)}$$

akkor $a_{11}' \equiv 1$; és az általánosság rovása nélkül föltételezhetjük, hogy $a_{12}' \not\equiv 0$; ennélfogva ha λ oly szám, melyre nézve

$$\frac{a_{12}'}{\lambda} \equiv 1 \pmod{p},$$

akkor a

$$\sigma = x_1' \equiv x_1, \; x_2' \equiv \frac{a_{12}'}{\lambda}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}'}{\lambda}x_n, \; x_i' \equiv x_i$$

szubsztituczióval

$$\sigma^{-1}s_1\sigma = s^{\lambda}(1, 2)$$

szubsztituczióhoz jutunk, melyből, ha

$$\lambda\nu \equiv 1 \pmod{p}$$

az

$$s^{\lambda\nu}(1, 2) = s(1, 2),$$

következőleg H összeesik Γ-val.

Ha pedig az a_{i1}-ek nem mindegyike null, pl. a_{21} nem zérus, akkor a

$$\sigma_1 = x_1' \equiv x_1, \; x_2' \equiv x_2, \; x_i' \equiv x_i - \frac{a_{i1}}{a_{21}}x_2$$

szubsztitutió alkalmazásával

$$\begin{aligned} s_2 = \sigma_1^{-1}s\sigma_1 = x_1' &\equiv b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n, \\ x_2' &\equiv b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n, \\ x_i' &\equiv x_i, \end{aligned}$$

ebből pedig

$$s_2^{-1}s^{-1}(1, 3)\, s_2 s\,(1, 3) = x_1' \equiv x_1 - (b_{11}-1)\, x_3$$
$$x_1' \equiv x_2 - b_{21} x_3$$
$$x_i' \equiv x_i.$$
$$s_2^{-1}s^{-1}(2, 3)\, s_2 s\,(2, 3) = x_1' \equiv x_1 - b_{12} x_3$$
$$x_2' \equiv x_2 - (b_{22}-1)\, x_3$$
$$x_i' \equiv x_i.$$

Ezen szubsztitucziók mindegyike ily alakú:

$$s_3 = x_1' \equiv x_1 + \lambda_1 x_3,\ x_2' \equiv x_2 + \lambda_2 x_3,\ x_i' \equiv x_i.$$

Ha λ_1 és λ_2 nem mindegyike, pl. λ_1 nem null, akkor a

$$\sigma_2 = x_1' \equiv x_1,\ x_2' \equiv -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_1 + x_2,\ x_i' \equiv x_i$$

szubsztitutióval való transzformáczióval nyerjük, hogy

$$\sigma_2^{-1} s_3 \sigma_2 = s^{\lambda_1}(1, 3),$$

tehát H összeesik Γ-val.

Ha pedig $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, akkor

$$b_{11} = b_{22} = 1,\ b_{12} = b_{21} = 0.$$

Mivel s_2 nem lehet identitás, azért a b-k között kell zérustól különbözőnek lenni. Ha b_{13} és b_{23} nem mindegyike zérus, de

$$b_{1i} = 0,$$
$$b_{2i} = 0,$$

akkor s_2, már s_3 alakú. Ha pedig a b_{13} és b_{23}-on kivül még más zérustól különböző b is van, pl. b_{14}, akkor

$$s_2^{-1}s^{-1}(4, 3)\, s_2 s^{-1}(4, 3) = x_1' \equiv x_1 - b_{14} x_3,$$
$$x_2' \equiv x_2 - b_{24} x_3,$$
$$x_i' \equiv x_i,$$

mely már szintén s_3 alakú. Mivel több eset nem lehetséges, azért $n > 2$ esetre tételünk igazolást nyert.

A közöltük levezetés csekély változtatással megegyezik DICKSON levezetésével.[1] JORDAN[2] levezetése hiányos.

Az $n=2$ esetben legyen

$$s = x_1' \equiv a_1x_1+b_1x_2,$$
$$x_2' \equiv a_2x_1+b_2x_2$$

H-nak oly szubsztitucziója, mely nincs meg Γ_1-ben.

a) Ha $a_2 \equiv 0$, akkor $b_2 \equiv a_1^{-1}$.

α) az $a_1^2 \equiv 1$ esetben az

$$e = x_1' \equiv -x_1,\ x_2' \equiv -x_2$$

jelölést számon tartva s, vagy se ily alakú:

$$s^{\mu}(1,\ 2) = x_1' \equiv x_1+\mu x_2,$$
$$x_2' \equiv x_2,$$

tehát H tartalmazza az $s^{\mu}(1,\ 2)$-t, vagy az $s^{2\mu}(1,\ 2)$-t.

β)[3] Az $a_1^2 \not\equiv 1$ esetben pedig

$$s^{-1}(1,\ 2)\,ss(1,\ 2)\,s^{-1} = s^{\frac{1-a_1^2}{a_1^2}}(1,\ 2).$$

b) Ha $a_2 \not\equiv 0$, akkor, ha $a_2\lambda \equiv 1$, a

$$\sigma = x_1' \equiv a_2x_1+b_2x_2$$
$$x_2' \equiv \lambda x_2$$

szubsztituczióval való tranczformáczió után

$$s_1 = \sigma^{-1}s\sigma = x_1' \equiv ax_1-\lambda^{-1}x_2,\ x_2' \equiv \lambda x_1,$$

ebből pedig, ha

$$\sigma_1 = x_1' \equiv -(\lambda k)^{-1}x_2,\ x_2' \equiv \lambda k x_1,$$
$$s_2 = \sigma_1^{-1}s_1\sigma_1s_1 = x_1' \equiv -k^2x_1-a\frac{k^{-2}+1}{\lambda}x_2,$$
$$x_2' \equiv -k^{-2}x_2.$$

---

[1] DICKSON, Linear groups. p. 83.

[2] JORDAN, Traité p. 108.

[3] Innen kezdve az $n=2$-re vonatkozó bizonyítás DICKSON-énál egyszerűbb.

$p > 5$ esetben k mindig megválasztható a

$$k^4 \not\equiv 1 \pmod{p}$$

föltételnek megfelelően és ekkor a $\beta)$ esettel állunk szemben és

$$s^{-1}(1,\ 2)\ s_2 s\,(1,\ 2)\,s_2^{-1} = s^{\frac{1-k^4}{k^4}}(1,\ 2).$$

Ha $p = 5$, akkor $k^4 \equiv 1$ mod. p, ha tehát $a \not\equiv 0$, akkor az $a)$ alatt tárgyalt esettel állunk szemben. Ha pedig $a \equiv 0$, akkor

$$s_1 = x_1' \equiv -\lambda^{-1}x_2,\quad x_2' \equiv \lambda x_1,$$

ebből pedig

$$s_3 \equiv s^{-1}(1,\ 2)\,s_1 s\,(1,\ 2)\,s_1 = x_1' \equiv -x_1 + x_2,$$
$$x_2' \equiv \lambda^2 x_1 - (\lambda^2+1)\,x_2.$$

Ez pedig a

$$\sigma_1 = x_1' \equiv x_1,\quad x_2' \equiv (\lambda^2+1)\,x_1 + x_2$$

szubsztituczióval való transzformáczióval a következővé lesz:

$$s_4 = \sigma_1^{-1}s_3\sigma_1 = x_1' \equiv -(\lambda^2+2)\,x_1 + x_2,\quad x_2' \equiv -x_1.$$

Mivel bármily λ-ra nézve teljesül a

$$\lambda^2 + 2 \not\equiv 0 \pmod{5}$$

föltétel, azért s_4 olyan s_1 alakú szubsztituczió, melyre nézve $a \not\equiv 0$; ezt az esetet pedig már tárgyaltuk. Ezzel aztán tételünket az $n = 2$, $p > 3$ esetre nézve is igazoltuk.

Ezek után már könnyen megkonstruálhatjuk G kompoziczió sorát. Ugyanis $\frac{G}{\Gamma}$ egyszeres izomorfizmusban van az $(1, s, \ldots, s^{p-2})$ csoporttal. Ha tehát

$$p-1 = p_1 \ldots p_r,$$
$$d \quad = q_1 \ldots q_s,$$

akkor $\frac{G}{\Gamma}$ és Γ_1 kompoziczió sorai rendre:

$$\frac{G}{\Gamma},\ G_{\frac{p-1}{p_1}},\ G_{\frac{p-1}{p_1 p_2}},\ldots,1$$

$$\Gamma_1,\ \Gamma_{\frac{d}{q_1}},\ \Gamma_{\frac{d}{q_1 q_2}},\ldots,1.$$

Ennélfogva G kompoziczió sora ily alakú

$$G,\ G_{\frac{p-1}{p_1}}\Gamma,\ G_{\frac{p-1}{p_1 p_2}}\Gamma,\ldots,\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_{\frac{d}{q_1}},\ \Gamma_{\frac{d}{q_1 q_2}},\ldots,1.$$

Következőleg G *kompoziczió tényezői:*

$$p_1,\ldots,p_r,\ \frac{R(p,\,n)}{d(p-1)},\ q_1,\ldots,q_s.$$

Pl. Ha $n=1$, akkor

$$R(p,\,1)=p-1,\ d=1\,;$$

$$\Gamma=\Gamma_1=1.$$

Tehát *az* $R(p,\,1)$ *kompoziczió sora*

$$G,\ G_{\frac{p-1}{p_1}},\ G_{\frac{p-1}{p_1 p_2}},\ldots,1,$$

kompoziczió tényezői pedig

$$p_1,\ldots,p_r,$$

ennélfogva az $R(p,\,1)$ *csoport föloldható csoport.*

12. Alkalmazások.

1. Az aritmetikai csoportot $A(m,\,n)$-el jelölve

$$A(p,\,1)=(1,s,\ldots,s^{p-1}),$$

hol

$$s=x'\equiv x+1 \pmod{p},$$

tehát $A(p,\,1)$ cziklikus csoport tranzitiv.

Azt a maximalis csoportot, mely $A(p,\,1)$*-et tartalmazza s együttal invariansul hagyja, metacziklikus csoportnak nevezzük.*

A metacziklikus csoport tehát az $R(p, 1)$ csoportnak és az $A(p, 1)$-nek a szorzata, ennélfogva a rendszáma $p(p-1)$; a kompoziczió sora:

$$A(p, 1)\, G,\ A(p, 1)\, G_{\frac{p-1}{p_1}}, \ldots, A(p, 1),\ 1$$

a kompoziczió tényezői pedig:

$$p_1, \ldots, p_r, p,$$

tehát a metacziklikus csoport föloldható.

Megfordítva minden transzitiv föloldható p-ed fokú csoport maga a metacziklikus csoport, vagy pedig annak egyik alcsoportja.

Ugyanis a tranzitiv föloldható p-ed fokú csoport kompozicziósorának az egység előtti csoportja épen $A(p, 1)$, mely az adott csoportban is invarians,[1] ebből pedig épen kimondott tételünk következik.

Ha már most általánosan az összes

$$A(p, 1)\, G_{\frac{p-1}{p_1 \ldots p_i}}$$

csoportokat metacziklikus csoportoknak nevezzük, akkor kimondhatjuk a tételt, hogy a

p-ed fokú irreduktibilis egyenletek közül csak a metacziklikus egyenletek oldhatók meg algebrailag.

2. Minden p^n-ed fokú primitiv föloldható G csoport fősorának az egység előtti csoportja oly

$$s_1^{\alpha_1} \ldots s_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha = 0, \ldots, p-1)$$

szubsztitucziókból áll, melyekben az s-ek egymással fölcserélhetők s egymástól független p-ed rendű szubsztitucziók,[2] tehát az 1. fejezetben mondottak értelmében ez a csoport nem más, mint az $A(p, n)$ csoport; de mivel ez a csoport invarians G-ben,

[1] Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni. 1900. p. 79.
[2] Netto, Gruppen u. Substitutionen theorie. 1908. p. 174.

azért G az $A(p, n)$ és $R(p, n)$ csoportok szorzata, vagy ennek egy alcsoportja. Ennélfogva:

Minden p^n-ed fokú primitív föloldható csoport az $A(p, n)$ és $R(p, n)$ csoportok szorzata, vagy pedig ennek a szorzatnak egyik alcsoportja.

Tételünknek az algebrai egyenletek elméletében a következő felel meg:

Egy primitív p^n-ed fokú egyenlet csak akkor lehet algebrailag megoldható, ha csoportja az $A(p, n) . R(p, n)$ csoportnak alcsoportja.

Suták József.

NEGYEDRENDŰ MÁSODFAJÚ GÖRBÉK SZÁRMAZTATÁSÁRÓL.

Jelölje

$$G = 0$$

valamely negyedrendű általános másodfajú görbe egyenletét Vezessünk keresztül ezen $G = 0$ görbe egyetlen kettőspontján P-n két tetszés szerinti

$$e_1 = 0, \; e_2 = 0$$

egyenest.

E két egyenes a $G = 0$ görbéből P-n kívül négy pontot metsz ki, melyeken keresztül vezessünk egy

$$k_1 = 0$$

kúpszeletet s a tőle kimetszett négy új ponton keresztül egy

$$k_2 = 0$$

kúpszeletet.

Minthogy a $G = 0$ görbe keresztülmegy az

$$e_1 e_2 k_2 = 0$$

degeneráló negyedrendű görbe és a

$$k_1 = 0$$

kúpszelet összes metszőpontjain, azért a Brill-Noether-féle tétel szerint írhatjuk, hogy

$$G = e_1 e_2 k_2 - g k_1 = 0,$$

a hol

$$g = 0$$

egy kúpszelet egyenlete. Ugyanazon tétel szerint a metszéspontok összeszámlálása által kapjuk, hogy

$$g = g_1 \cdot g_2,$$

és

$$g_1 = 0, \; g_2 = 0.$$

oly egyenesek egyenletei, melyek a P kettős ponton mennek keresztül.

E szerint tehát írhatjuk, hogy

$$G = e_1 e_2 k_2 - g_1 g_2 k_1 = 0,$$

miből következik, hogy a $G = 0$ görbe a következő két kúpszeletsor képződménye:

$$k_1 - \lambda k_2 = 0,$$

$$e_1 e_2 - \lambda g_1 g_2 = 0,$$

melyek közül a második degenerált s minden tagja két oly egyenesre esik szét, melyek a $G = 0$ görbe P kettőspontján keresztül mennek. Egy ilyen kúpszeletsort, miként ismeretes, oly egyenespárok alkotnak, melyek két fix egyenest harmonikusan választanak el egymástól.

E szerint *egy közönséges és egy olyan degenerált kúpszeletsor képződménye, melyet két egyenest egymástól harmonikusan elválasztó involutorius egyenespárok alkotnak, egy oly negyedrendű másodfajú görbe, melynek kettőspontja az involutorius egyenespárok centruma.*

Mint mellékeredményt kimondhatjuk, hogy a $G = 0$ görbe négy pontján keresztülmenő kúpszeletsor egy tagja a görbét még oly négy pontban találja, melyek kettesével egy a P-n keresztülmenő egyenespáron vannak, akkor e kúpszeletsor bármely tagja a $G = 0$ görbét még oly négy pontban találja, melyeket P kettősponton keresztülmenő involutorikus egyenespárok metszenek ki.[1] *Nagy Gyula.*

---

[1] Ezen tétel, miként KOHN GUSZTÁV bécsi egyetemi professzor úr szives volt megjegyezni, csak speciális esete az általános görbéken levő korreszidüális pontseregekre vonatkozó tételnek.

VIZSGÁLATOK AZ ELEMI SZÁMELMÉLET KÖRÉBŐL.

(Első közlemény.)

I.

Ha n tetszőleges pozitiv egész szám, akkor az

$$1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, n-2, n-1 \tag{1}$$

sorozat adja meg az n-nel inkongruens számok legkisebb pozitiv maradékainak teljes rendszerét. Ismeretes a számelmélet elemeiből az a tétel, hogy bárminő n-hez képest relativ prim γ számmal szorozzuk az (1) teljes maradéksort, a keletkező számok megint az inkongruens számok teljes maradéksorát adják. Ha a szorzással keletkező maradéksort megint a legkisebb pozitiv maradékokkal jellemezzük, vagyis ha

$$\gamma i \equiv r_i \ (\text{mod. } n),$$

$$1 \leqq r_i \leqq n-1$$

akkor az

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_i, \ldots, r_{n-2}, r_{n-1} \tag{2}$$

sorozat az (1) sorozattól csak az elemek sorrendjében fog különbözni. Nyilvánvaló, hogy a γ-val való szorzás hatása abban áll, hogy az (1) permutáczión végrehajtja az

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, i, \ldots, n-2, n-1 \\ r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_{n-2}, r_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

helyettesítést. Tegyük vizsgálat tárgyává ezt a helyettesítést és keressük meg a törvényszerűségeit.

Mindenekelőtt állapitsuk meg azt, hogy miképen bomlik fel ciklusokra a (3) helyettesítés. Tartozzék a γ szám a δ kitevőhöz modulo n, a mely kitevő tudvalevőleg osztója a $\varphi(n)$-nek. Legyen a egy tetszőleges az n-nél kisebb és hozzá relativ prim pozitiv egész szám, ez a (3) helyettesítés folytán átmegy a γa-val kongruens r_a számba, ez pedig egy olyan számba megy át, a mely kongruens γr_a-val és így kongruens $\gamma^2 a$-val; ily módon látnivaló, hogy az a-val meginduló cziklus elemei rendre kongruensek a $\gamma^{j-1}a$ számokkal; és mivel már

$$\gamma^\delta a \equiv a (\text{mod. } n)$$

azért az a-val meginduló cziklus utolsó eleme $\gamma^{\delta-1}a$-val lesz kongruens, miért is a cziklus épen δ számot tartalmaz, a mely valamennyi relativ prim az n-hez. Minthogy tehát minden az n-hez relativ prim szám δ elemszámú cziklusba tartozik, azért *az összes relativ primszámok* $\frac{\varphi(n)}{\delta}$ *különböző δ elemszámú cziklusba oszolnak szét.* Nevezzük ezeket a mindig létező cziklusokat *elsőfajú cziklusok*nak.

Ha az n törzsszám $(n=p)$, akkor az (1) sorozat minden száma relativ prim hozzá képest és így az elsőfajta cziklusok már kimerítik az összes cziklusokat. *Ha tehát az $n=p$ törzsszám, akkor a* (3) *helyettesítés* $\frac{p-1}{\delta}$ *különböző, δ elemszámú cziklusra bomlik fel; ha továbbá a γ primitiv gyök, vagyis ha $\delta=p-1$, akkor a helyettesítés egyetlenegy cziklusból áll, azaz irreduczibilis.*

Nem ennyire egyszerűek a viszonyok akkor, ha az n összetett szám, ekkor ugyanis az elsőfajú cziklusokon felül kell még lenni további cziklusoknak is, a melyek az n-hez nem relativ prim számokat tartalmazzák; nevezzük ezeket a hátralévő cziklusokat *másodfajú cziklusok*nak. Legyen az n-nek valamelyik valódi osztója q, úgy hogy

$$n = qd,$$

ekkor az (1) sorozat $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)=\varphi(q)$ olyan számot tartalmaz, melyeknek az n-nel való legnagyobb közös osztójuk d. Legyen egy ilyen szám b; a b-vel kezdődő cziklus elemei rendre kongruensek modulo n a $\gamma^{j-1}b$ számokkal és a cziklus akkor ér véget, a mikor

$$\gamma^j b \equiv b \,(\text{mod. } n)$$

a honnan $b = da$, $n = dq$, miatt következik, hogy

$$\gamma^j a \equiv a \,(\text{mod. } q)$$

hol már a és q viszonylagos törzsszámok. De a legutóbbi kongruenczia először akkor van kielégítve, a mikor $j = \delta(q)$, ha ugyanis a γ szám $\delta(q)$ kitevőhöz tartozik modulo q, úgy hogy a b-vel kezdődő cziklus $\delta(q)$ elemet tartalmaz. *Ennélfogva azok a számok, melyeknek az n-nel való legnagyobb közös osztójuk $d = \frac{n}{q}$, $\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}$ különböző, $\delta(q)$ elemszámú cziklusba oszolnak szét.* A két utolsó kongruenczia együttes fennállása mutatja azt is, hogy *az n-re vonatkozó* (3) *helyettesítésnek a q valódi osztótól meghatározott másodfajú cziklusait egyszerűen úgy kaphatjuk meg, hogy a q-ra vonatkozó* (3) *helyettesítésnek összes elsőfajú cziklusaiban megszorozzuk az elemeket az $\frac{n}{q} = d$ számmal.*

Ily módon az n minden valódi osztójához fog tartozni meghatározott számmal lévő és egyenlő elemszámú cziklus; látnivaló, hogy az elsőfajú cziklusok előállítása azon speciális esete a másodfajú cziklusok előállításának, a mikor $q = n$, $d = 1$.

Nyilvánvaló már most, hogy *a tetszőleges n számra vonatkozó* (3) *helyettesítés cziklusainak számát megadja az*

$$l = \sum \frac{\varphi(q)}{\delta(q)} \tag{4}$$

képlet, a melyben q gyanánt rendre az n összes valódi osztóit kell venni.

Mivel a $\delta(q)$ kitevő okvetlenül valódi osztója a δ kitevőnek, azért *mindenik másodfajú cziklus elemszáma valamilyen osztója az elsőfajú cziklus elemszámának, a δ-nak.* Ismeretes, hogy bármely helyettesítés rendszámát megadja a cziklusok elemszámainak legkisebb közös többszöröse; ennélfogva *az n-re vonatkozó* (3) *helyettesítés rendszámát megadja az a δ kitevő, a melyhez a γ tartozik modulo n.*

Ha az n törzsszám, akkor csakis elsőfajú cziklus létezvén, csupa egyforma elemszámú cziklusra bomlik fel a (3) helyettesítés; ha ellenben az n összetett szám, akkor ez rendszerint nincs így, mert a másodfajú cziklusok közt általában lesznek kisebb elemszámúak is, kivévén azt az esetet, a mikor a γ az n minden valódi osztójára vonatkozólag ugyanahhoz a δ kitevőhöz tartozik; ennélfogva a (3) helyettesítésnél a cziklusok egyformasága csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy az n törzsszám legyen.

Kérdezzük még azt, hogy mikor létezik egyes cziklus, vagyis hogy mikor fog az (1) permutáczió valamelyik eleme a (3) helyettesítés alkalmazásával önmagába átmenni. Tegyük fel, hogy a b ilyen elem, hogy tehát

$$\gamma b \equiv b \,(\text{mod. } n),$$
$$(\gamma-1)\, b \equiv 0 \,(\text{mod. } n).$$

Innen látnivaló, hogy ha γ olyan szám, hogy nem csupán γ, de $\gamma-1$ is relativ prim az n-hez (a mi törzsszám modulus esetében minden γ számra bekövetkezik), akkor a feladat lehetetlen, mert a b nem lehet az n többszöröse. A legutolsó kongruenczia minden b-re teljesül a $\gamma \equiv 1 \,(\text{mod. } n)$ esetben, de ezt az esetet figyelmen kívül hagyhatjuk, mert ez a magától értetődő identikus helyettesítés, a mely minden elemet a helyén hagy. Ettől tehát eltekintve *egyes cziklus csakis akkor létezhetik, ha $(\gamma-1)$-nek és n-nek 1-nél nagyobb legnagyobb közös osztója* (D) *van.* A legutolsó kongruencziából most már következik, hogy

$$\frac{\gamma-1}{D}\, b \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{n}{D}\right)$$

a mi csakis úgy teljesedhetik, ha

$$b = z\,\frac{n}{D}$$

és ezek közül az (1) sorozatban helyet foglal a következő $D-1$ különböző szám:

$$\frac{n}{D}, 2\frac{n}{D}, \ldots, (D-1)\frac{n}{D}. \tag{5}$$

Ezek lesznek tehát azok az elemek, a melyek önmagukba mennek át.

A fentiek szerint az 1-től $(n-1)$-ig terjedő számokat a (3) helyettesítés alkalmazásával l különböző cziklusba lehet sorozni; vizsgáljuk most közelebbről az ugyanazon cziklusba kerülő számok közös sajátságait. A cziklusok nyilvánvalóan azzal a kettős tulajdonsággal birnak, hogy egy cziklusban fekvő bármelyik két elem szorzatának modulo n legkisebb pozitiv maradéka ugyanabba (általában másik) cziklusba tartozó szám, vagy pedig zérus (a mely utóbbi eset csakis másodfajta cziklusnál fordulhat elő); és hogy két különböző cziklusban fekvő bármelyik két elem szorzatának modulo n legkisebb pozitiv maradéka ugyanabba (általában másik) cziklusba tartozó szám, vagy pedig zérus (a mely utóbbi eset csakis akkor következhetik be, ha mindkét cziklus másodfajta).

Az egyes cziklusokban foglalt elemek *összegét* illetőleg eltérők a viszonyok a szerint, a mint a cziklusra jellemző $\delta(q)$ kitevő páros vagy páratlan szám. Foglalkozzunk először azzal az esettel, hogy a $\delta(q)$ kitevő páros szám. Most két aleset következhetik be, a szerint, hogy a

$$\gamma^{\frac{\delta(q)}{2}} \equiv -1 \pmod{q} \tag{6}$$

kongruenczia igaz vagy nem igaz. Ha ez a kongruenczia igaz, akkor belőle az következik, hogy

$$\gamma^{\frac{\delta(q)}{2}+\lambda-1} \equiv -\gamma^{\lambda-1} \pmod{q}$$

és ha a jelent egy a q-hoz relativ prim számot, akkor a q ra vonatkozó (3) helyettesítés a-val kezdődő elsőfajta cziklusának i-edik elemét megadja az

$$a_i \equiv \gamma^{i-1} a \,(\mathrm{mod.}\ q)$$

kongruenczia. Ennélfogva világos, hogy

$$a_{\frac{\delta(q)}{2}+\lambda} \equiv -a_\lambda \equiv q-a_\lambda \,(\mathrm{mod.}\ q)$$

$$a_{\frac{\delta(q)}{2}+\lambda} = q-a_\lambda. \tag{7}$$

Már most az $n=qd$-re vonatkozó (3) helyettesitésnek megfelelő másodfajta cziklusában

$$b_i = da_i,$$

úgy hogy

$$b_{\frac{\delta(q)}{2}+\lambda} = n-b_\lambda. \tag{7'}$$

Ebben az alesetben tehát a páros elemszámú cziklus két egyenlő részre bomlik fel úgy, hogy az első rész valamelyik elemének és a második rész hasonló fekvésű elemének összege épen n. Innen tüstént következik, hogy *az ilyen cziklusban foglalt elemek összege n-nek többszöröse,* még pedig

$$\sum_{i=1}^{\delta(q)} b_i = \frac{\delta(q)}{2} n. \tag{8}$$

Ez az aleset fog szükségképen mindig bekövetkezni, ha a q osztó törzsszám.

A második alesetben, mikor a (6) kongruenczia nem igaz, egyáltalában nem létezik olyan ξ kitevő, a melyik mellett

$$\gamma^{\xi} \equiv -1 \ (\mathrm{mod.}\ q). \tag{9}$$

Ennek első következése az, hogy az a_i, meg a $q-a_i$ sohasem tartozhatik ugyanabba a cziklusba, de további következése még az is, hogy *bármelyik cziklushoz lehet találni egy másik azonos elemszámú cziklust, a melynek elemei az adott cziklus elemeit rendre q-ra egészítik ki.* Legyen ugyanis a q-ra vonatkozólag felvett elsőfajta cziklusnak általános eleme a_i, ha ezen cziklusnak elemeit megszorozzuk a $q-1$ számmal és a legkisebb pozitiv maradékokat veszszük, akkor ezek egy új cziklust alkotnak, a melynek általános eleme

$$a_i' \equiv (q-1)\,a_i \equiv -a_i \equiv q-a_i \,(\text{mod. } q),$$

$$a_i' = q-a_i \tag{10}$$

és ha megint figyelembe veszszük azt, hogy a q-ra vonatkozó elsőfajta cziklusból miképen állithatjuk elő az n-re vonatkozó megfelelő másodfajta cziklust, akkor azt kapjuk, hogy a b_i elemű cziklushoz mindig tartozik olyan megegyező elemszámú b_i' elemű cziklus, hogy

$$b_i' = n - b_i. \tag{10'}$$

Nevezzünk két ilyen cziklust *társcziklusok*nak. A vizsgált második alesetben tehát a q osztó meghatározta cziklusok olyanok, hogy párjával társcziklusokat alkotnak. A társcziklusok alaptulajdonságából rögtön következik az is, hogy *két társcziklusban foglalt elemek összege $\delta(q)\,n$.* Mivel a második alesetben a q osztóhoz tartozó cziklusok száma okvetlen páros, azért kell, hogy a $\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}$ hányados is páros legyen; *ha tehát ez a hányados páratlan szám, akkor szükségképen az első aleset következik be, vagyis a* (6) *kongruenczia szükségképen igaz.*

Térjünk át arra a második főesetre, hogy a $\delta(q)$ páratlan szám. Mivel $q>2$ esetében a $\varphi(q)$ páros, azért a q osztó meghatározta cziklusok száma, mint a $\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}$ hányados, mindenesetre páros; mivel továbbá páratlan $\delta(q)$ mellett a (9) kongruenczia sohasem lehet teljesitve, azért most ugyanúgy áll a dolog, mint az első főeset második alesetében, vagyis *a cziklusok párjával társcziklusokat alkotnak.* Ez alól egyetlenegy kivétel van és ez a $q=2$ esete; most ugyanis $\varphi(2)=1$, $\delta(2)=1$, úgy hogy csupán egy ilyen cziklus van és így társcziklusról nem is lehet beszélni. De most közvetlenül világos, hogy a $q=2$-re vonatkozó elsőfajta cziklus csupán az 1-et tartalmazza és mivel $d=\frac{n}{2}$, azért a megfelelő másodfajta cziklus csupán az $\frac{n}{2}$ elemből fog állni. Ez a kivétel természetesen csakis páros n esetében fordul elő, de ilyenkor mindig. Ha az n törzsszám, akkor páros δ esetében bármelyik cziklusban az elemek összege $\frac{\delta}{2} n$ és páratlan δ esetében a cziklusok párjával társcziklusokat alkotnak.

Lássuk most azt, hogy mit lehet általában mondani bármelyik cziklusban foglalt elemek összegére vonatkozólag. Vizsgáljuk először is az elsőfajú cziklusokat. Mivel γ a δ kitevőhöz tartozik modulo n, azért

$$\frac{\gamma^\delta - 1}{n} = Q \tag{11}$$

egész szám és

$$\sum_{i=1}^{\delta} \gamma^{i-1} = \frac{\gamma^\delta - 1}{\gamma - 1} = \frac{nQ}{\gamma - 1} \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{n}{D}\right),$$

ha D-nek nevezzük az n és $j-1$ számok legnagyobb közös osztóját. Minthogy az a számot tartalmazó elsőfajú cziklus általános elemét illetőleg

$$a_i \equiv \gamma^{i-1} a \,(\text{mod. } n),$$

azért az elemek összegére vonatkozólag ugyancsak

$$\sum_{i=1}^{\delta} a_i \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{n}{D}\right). \tag{12}$$

Vizsgáljunk most egy másodfajta cziklust, a melyet az n-nek q osztója határoz meg. A q-ra vonatkozó megfelelő elsőfajta cziklusban alkalmazhatjuk az elemek összegére az imént talált tételt, úgy hogy

$$\sum_{i=1}^{\delta(q)} a_i = k \frac{q}{D'},$$

a hol D' jelenti a q és $\gamma - 1$ számok legnagyobb közös osztóját és így a D' osztója a D-nek. Mivel az n-re vonatkozó megfelelő másodfajta cziklusban $b_i = da_i$ és $n = dq$, azért a legutolsó egyenletet szorozva d-vel, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{\delta(q)} b_i = k \frac{n}{D'}$$

és D' a D-nek osztója lévén annál inkább

$$\sum_{i=1}^{\delta(q)} b_i = \mu \frac{n}{D},$$

vagyis megint azt találjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{\delta(q)} b_i \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{n}{D}\right). \tag{12'}$$

Egész általában kimondhatjuk tehát azt, hogy *bármelyik cziklusban foglalt elemek összege többszöröse az* $\frac{n}{D}$ *számnak.* Ezt a tételt fejezzük ki a

$$\sum c_i = \sigma \frac{n}{D} \tag{13}$$

képlettel, a melyben c_i jelenti egy tetszőleges cziklusnak általános elemét.

Ha a γ választása úgy történik, hogy nem csupán maga γ, hanem a $\gamma-1$ is relativ prim az n-hez, akkor a (13) képletben $D=1$ és így bármelyik cziklusban foglalt elemek összege többszöröse magának az n-nek; így például ez az eset következik be, ha n törzsszám és γ tetszőleges, vagy ha n páratlan szám és $\gamma = 2$.

Mutassuk meg egy számbeli példán az eddig talált törvényszerűségeket. Legyen $n = 15$, $\gamma = 7$, úgy hogy a (3) helyettesítés most a következő:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14 \\ 7, & 14, & 6, & 13, & 5, & 12, & 4, & 11, & 3, & 10, & 2, & 9, & 1, & 8 \end{pmatrix}.$$

A helyettesítés a következő cziklusokra bomlik fel:

(1, 7, 4, 13), (14, 8, 11, 2),
(3, 6, 12, 9),
(5), (10).

Az első sorban álló két cziklus adja az összes elsőfajú cziklusokat; az elemszám bennök négy, mert $\delta(15) = 4$, és számuk kettő, mert $\frac{\varphi(15)}{\delta(15} = \frac{8}{4} = 2$. A két elsőfajú cziklus társcziklusokat alkot, mert

$$\gamma^{\frac{\delta}{2}} = 7^2 = 49 \equiv 4 \not\equiv -1 \text{ (mod. } 15).$$

A második sorban álló egy cziklust a $q = 5$ osztó határozza meg; $\delta(5) = 4$, $\frac{\varphi(5)}{\delta(5)} = 1$.

Végre a harmadik sorban álló két cziklus a $q = 3$ osztóhoz tartozik; $\delta(3) = 1$, $\frac{\varphi(3)}{\delta(3)} = 2$; a két cziklus a $\delta(3)$ páratlan volta miatt társcziklusokat alkot.

A fenti példában $\gamma - 1 = 6$ és így $D = 3$, $\frac{n}{D} = 5$, úgy hogy bármelyik cziklusban az elemek összege osztható 5-tel.

Különösen egyszerűvé válik a (3) helyettesítés abban a speciális esetben, a mikor n páratlan szám ($n = 2m+1$) és $\gamma = 2$, ekkor ugyanis a helyettesítés a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, \ldots, m-1, m, m+1, m+2, \ldots, 2m-1, 2m \\ 2, 4, 6, \ldots, 2m-2, 2m, 1, 3, \ldots, 2m-3, 2m-1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

vagyis ekkor a helyettesítés alkalmazásával keletkező végső permutácziót a természetes sorrendű páros számok és ezekre következve a természetes sorrendű páratlan számok adják meg.

A cziklusban foglalt elemek összegére vonatkozó fenti eredmények szoros kapcsolatban állnak az ugyanazon cziklusba kerülő összes elemeknek egy érdekes közös tulajdonságával. Ennek megtalálása végett induljunk ki abból, hogy a γ szám a δ kitevőhöz tartozván modulo n, a

$$\frac{\gamma^\delta - 1}{n} = Q$$

egész szám. Mivel továbbá

$$nQ = \gamma^\delta - 1 < \gamma^\delta$$

azért annál inkább

$$xQ < \gamma^\delta$$

a hol

$$1 \leq x \leq n-1$$

vagyis a hol x jelentheti az (1) sorozatba tartozó számok bármelyikét. Ha tehát az xQ számot előállítjuk γ csökkenő hatványai szerint haladó sor alakjában, melyben az egyes együtthatók a γ-nál kisebb pozitiv számok, akkor a legmagasabb még előfordulható hatványkitevő a $\delta-1$ lesz, úgy hogy a szóban forgó előállítás a következő alakú lesz:

$$xQ = \sum_{k=1}^{\delta} A_k \gamma^{\delta-k}. \tag{15}$$
$$0 \leqq A_k \leqq \gamma - 1.$$

Ha a (15) előállításban a zérus együtthatókat is felveszszük, akkor az xQ számot jellemzi a δ számmal lévő A_k együtthatók rendszere, a mi természetesen nem egyéb, mint az xQ szám kifejezése a γ alapú számrendszerben.

Vizsgáljuk most azt, hogy a (15) kifejtésben az x helyébe rendre téve a (3) helyettesités egyik cziklusának elemeit, a keletkező együtthatórendszerek közt minő összefüggések mutatkoznak. Legyen tehát a figyelembe vett cziklus két egymásra következő eleme c_{i-1} és c_i, úgy hogy

$$c_i \equiv \gamma c_{i-1} \pmod{n}.$$

Szorozva ezt a kongruencziát $\gamma^{\delta-1}$-el azt kapjuk, hogy

$$c_{i-1} \equiv \gamma^{\delta-1} c_i \pmod{n}. \tag{16}$$

Tegyük továbbá fel, hogy a $c_i Q$ számot tényleg előállítottuk a (15) alakban és legyen

$$c_i Q = A_1 \gamma^{\delta-1} + A_2 \gamma^{\delta-2} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma^2 + A_{\delta-1}\gamma + A_\delta. \tag{17}$$

Figyelembe vévén azonban Q-nak a (11) képlet megadta jelentését, a legutolsó egyenlet írható a következő alakban is:

$$c_i \gamma^\delta = n(A_1 \gamma^{\delta-1} + A_2 \gamma^{\delta-2} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma^2 + A_{\delta-1}\gamma + A_\delta) + c_i,$$

a honnan γ-val való osztással következik, hogy:

$$c_i \gamma^{\delta-1} = n(A_1 \gamma^{\delta-2} + A_2 \gamma^{\delta-3} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma + A_{\delta-1}) + \frac{nA_\delta + c_i}{\gamma}.$$

A (16) kongruenczia miatt tehát

$$c_{i-1} \equiv \frac{nA_\delta + c_i}{\gamma} \pmod{n}.$$

De mivel

$$A_\delta \leqq \gamma - 1, \quad c_i \leqq n-1,$$

azért

$$\frac{nA_\delta + c_i}{\gamma} \leqq \frac{nj-1}{\gamma} < n,$$

úgy hogy egyszerűen

$$c_{i-1} = \frac{nA_\delta + c_i}{\gamma}.$$

Ennélfogva

$$c_{i-1} = c_i \gamma^{\delta-1} - n(A_1\gamma^{\delta-2} + A_2\gamma^{\delta-3} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma + A_{\delta-1})$$

és a (17) egyenletből

$$Q = \frac{\gamma^\delta - 1}{n} = \frac{A_1\gamma^{\delta-1} + A_2\gamma^{\delta-2} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma^2 + A_{\delta-1}\gamma + A_\delta}{c_i}$$

összeszorozva a két egyenletet egymással, lesz:

$$\begin{aligned} c_{i-1}Q = {} & A_1\gamma^{2\delta-2} + A_2\gamma^{2\delta-3} + \cdots + A_{\delta-1}\gamma^\delta + A_\delta\gamma^{\delta-1} \\ & - A_1\gamma^{2\delta-2} - A_2\gamma^{2\delta-3} - \cdots - A_{\delta-1}\gamma^\delta \\ & + A_1\gamma^{\delta-2} + A_2\gamma^{\delta-3} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma + A_{\delta-1} \end{aligned}$$

és ha a szembeszökő összevonásokat megteszszük, akkor azt kapjuk, hogy:

$$c_{i-1}Q = A_\delta\gamma^{\delta-1} + A_1\gamma^{\delta-2} + A_2\gamma^{\delta-3} + \cdots + A_{\delta-2}\gamma + A_{\delta-1}. \quad (18)$$

Összehasonlítva egymással a (18) és (17) kifejtések együtthatóit, azt látjuk, hogy a $c_{i-1}Q$ együtthatóinak egyszeri cziklikus felcserélése megadja a c_iQ együtthatóit. Természetesen ugyanígy kaphatjuk meg a c_iQ együtthatóiból a $c_{i+1}Q$ együtthatóit és így tovább.

Ha tehát valamelyik cziklus kezdőelemének tekintjük a c_1 elemet és előállítjuk a c_1Q számnak együtthatóit, ha továbbá a cziklusnak i-edik eleme c_i, akkor a c_iQ számnak együtthatóit *úgy kapjuk meg, hogy a c_1Q szám együtthatóit $(i-1)$-szer egymásután cseréljük fel cziklikusan.*[1]

Abban a speciális esetben, mikor n törzsszám és γ ennek primitiv gyöke, a (3) helyettesités tudvalevőleg egyetlenegy cziklust alkot, a miből az következik, hogy ha a Q számot előállítjuk a γ alapú számrendszerben, akkor bármelyik xQ szám $(x<n)$ hasonló előállitását úgy kapjuk meg, hogy a Q együtthatóit bizonyos számszor cziklikusan felcseréljük.

A (15) kifejtésnél az együtthatókat illetőleg két eset adhatja elő magát. Az első eset az lesz, mikor az x szám δ elemszámú cziklusba tartozik; ekkor az xQ szám δ számmal lévő együtthatójának összes cziklikus felcserélései megadják a cziklusba tartozó összes elemeket; és mivel ezen elemek különbözők, azért az együtthatók cziklikus felcserélésével keletkező rendszerek is különbözők tartoznak lenni, vagyis *ekkor az együtthatók rendszere nem bomlik fel több egyenlő periodusra.*

A második esetben az x szám valami olyan másodfajta cziklusba tartozik, melynek $\delta(q)$ elemszáma δ-nál kisebb és ennek valamely osztója, most tehát az xQ együtthatóit $\delta(q)$-szor egymásután cziklikusan felcserélve, vissza kell jutnunk az xQ együtthatóira, hasonlóképen vissza kell jutnunk az eredeti együtthatókra ezeknek $2\delta(q)$-szor való cziklikus felcserélése után és így tovább, úgy hogy *ekkor az xQ szám együtthatóinak rendszere annyi egyenlő periodusra bomlik fel, a hányad része $\delta(q)$ a δ-nak.*

Maga a Q szám mindig olyan együtthatórendszerrel bír, a mely egyetlenegy periodusból áll.

Ha van egyes cziklus, akkor az azt alkotó számnak megfelelő (15) előállításban az összes együtthatók egyenlők tartoznak lenni. Az együtthatók összeeső értéke ez esetben nagyon egyszerűen határozható meg. Mivel az (5) szerint az egyes

---

[1] E tételnek más szempontból való tárgyalását illetőleg lásd dr. PAUL BACHMANN: Niedere Zahlentheorie I. pag. 351—361.

ciklus elemének általános alakja $z\frac{n}{D}$, azért a (15) képlet most átmegy a következőbe:

$$z\frac{n}{D}Q = A\sum_{k=1}^{\delta}\gamma^{\delta-k} = A\frac{\gamma^{\delta}-1}{\gamma-1} = A\frac{nQ}{\gamma-1},$$

a honnan azt kapjuk, hogy:

$$A = z\frac{\gamma-1}{D}\cdot \tag{19}$$

Teljesség kedvéért jegyezzük még meg azt, hogy az xQ együtthatóiból tüstént előállíthatjuk az $(n-x)Q$ együtthatóit is. Legyen ugyanis

$$xQ = \sum_{k=1}^{\delta} A_k \gamma^{\delta-k},$$

ekkor aztán

$$(n-x)Q = (\gamma^{\delta}-1) - xQ = (\gamma-1)\sum_{k=1}^{\delta}\gamma^{\delta-k} - \sum_{k=1}^{\delta}A_k\gamma^{\delta-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\delta}(\gamma-1-A_k)\gamma^{\delta-k}.$$

Állapítsunk meg végre összefüggést az egy ciklusba tartozó elemek összege és a ciklust jellemző A_k együtthatók összege közt. Tegyük először is fel azt, hogy elsőfajta vagy δ elemszámú másodfajta ciklusról van szó. Képzeljük felírva a (17) egyenleteket az i index $1, 2, \ldots, \delta$ értékeire nézve és adjuk ezeket össze, így azt kapjuk, hogy

$$Q\sum_{i=1}^{\delta} c_i = \frac{\gamma^{\delta}-1}{\gamma-1}\sum_{k=1}^{\delta} A_k$$

és ha még tekintetbe veszszük a (13) képletet, akkor a következő összefüggést nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{\delta} A_k = \sigma\frac{\gamma-1}{D} = \frac{(\gamma-1)\sum c_i}{n}. \tag{20}$$

Különösen egyszerűvé válik ez az összefüggés akkor, a mikor $\gamma-1$ relativ prim az n-hez, mert ekkor $D=1$ és így

$$\sum_{k=1}^{\delta} A_k = \sigma(\gamma-1). \tag{20'}$$

Az összefüggés még egyszerűbbé válik, ha az n páratlan szám és $\gamma = 2$, mert ekkor

$$\sum_{k=1}^{\delta} A_k = \sigma = \frac{\sum_{i=1}^{\delta} c_i}{n}. \qquad (20'')$$

Mivel továbbá most az A_k csak 0 vagy 1 lehet, azért az együtthatók összege egyúttal azt jelenti, hogy a $c_i Q$ számot előállítva mint 2 csökkenő hatványainak összegét, ez az összeg tényleg hány tagból fog állni.

Ha olyan másodfajta cziklusról van szó, a melynek $\delta(q)$ elemszáma t-ed része a δ-nak, akkor a (20) összefüggés helyébe nyilvánvalóan a következő lép:

$$\sum_{k=1}^{\delta} A_k = t\sigma \frac{\gamma - 1}{D} \qquad (21)$$

Mutassuk meg a (15) előállításra talált törvényszerűségeket a már fentebb használt példa esetében, mikor is $n = 15$, $\gamma = 7$, $\delta = 4$.

$$Q = \frac{7^4 - 1}{15} = 160 = 0 \,.\, 7^3 + 3 \,.\, 7^2 + 1 \,.\, 7 + 6.$$

Az 1-gyel kezdődő cziklusban foglal helyet a 4, még pedig az 1-től két helylyel jobbra, ezért

$$4Q = 640 = 1 \,.\, 7^3 + 6 \,.\, 7^2 + 0 \,.\, 7 + 3.$$

A (20) összefüggés is teljesedik, mert most $\sum A_k = 10$, $\sum c_i = 25$, $\gamma - 1 = 6$, $D = 3$, $\sigma = 5$.

Az 5 egyes cziklust alkotván, az $5Q$ minden együtthatója egyenlő tartozik lenni és valóban

$$5Q = 800 = 2 \,.\, 7^3 + 2 \,.\, 7^2 + 2 \,.\, 7 + 2.$$

Ifj. Szily Kálmán.

TÖBBMÉRETŰ ALAKZATOK EGY- ÉS KÉTOLDALÚSÁGÁRÓL.

Bevezetés.

Az egy- és kétoldalúság fogalmát felületek esetére Möbius [1] vezette be. A fogalom általánosítása többméretű alakzatokra Dehn- és Heegaardtól [2] származik.[3] Az ezen általánosítás alapjául szolgáló elméletet, melyet Steinitz [4] is lényegesen továbbfejlesztett, röviden ismertetjük az 1. §-ban, hogy ne kelljen minduntalan az *Encyklopädie* czikkére utalnunk. A 2. §. a projektiv tereket vizsgálja az egy- és kétoldalúság szempontjából. A 3. §-ban végül egyszerű példákat adunk mind határolt, mind pedig zárt (tetszőleges méretű) alakzatokra, melyek valamennyien egyoldalúak.

A terminológiát illetőleg előrebocsátjuk a következőket.

Dycknek [5] egy tovább nem részletezett megjegyzéséhez csatlakozva Steinitz [6] rámutatott arra, hogy az egyoldalúság definicziója nem azonosítható az «indicatrix megfordíthatóságá»-val és így a Möbius vagy Klein [7] definicziójával sem, miután az

---

[1] *Gesammelte Werke*, II., p. 477.

[2] «Analysis situs», *Encykl. d. Math.*, III_1. kötet, p. 153 (1907). Itt különösen a «Grundlagen» jön tekintetbe.

[3] Analytikus módszerekkel — egy függvénydetermináns előjelének vizsgálata alapján — ezt az általánosítást már előbb Poincaré elvégezte: *Journal de l'Ecole Polytechnique* (2), 1. kötet, p. 25 (1895).

[4] *Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges.*, 7. k., p. 29 (1908).

[5] *Mathematische Annalen*, 32. k., p. 474.

[6] id. h., p. 35.

[7] *Math. Ann.* 9. k., p. 479. Klein itt adott definicziója kis módosításra szorul, mert, a mint Klein itt a definicziót megfogalmazta, a gömbfelület is egyoldalú («Doppelfläche») volna.

egyoldalúság — a mint ezt a szót rendesen értelmezik — nem a felületet önmagában, hanem csupán háromméretű környezetéhez viszonyitva jellemzi.[1] Mi mindazonáltal — a mint az egyébként szintén szokásos — az indicatrix megfordithatósága számára is a rövidebb «egyoldalúság» megjelölést fogjuk használni. Hiszen, ha szükséges, e tulajdonság, mint *«absolut egyoldalúság»* a *«relativ* (Dyck és Steinitz értelmében vett) *egyoldalúság»*-tól jól megkülönböztethető.[2] A relativ egyoldalúságnak a szemlélettől független definicziója bentfoglaltatik az «oldal»-fogalom Steinitz-féle értelmezésében.[3] Ez olyan módon van megadva, hogy a «relativ egyoldalúság» értelmezése minden méretszámra lehetővé válik.

1. §. A Dehn-Heegaard-féle elmélet.

A vonalak[4] véges sokaságát *zárt vonal*nak nevezzük, ha e vonalak minden végpontja pontosan a sokaság *két* vonalának

---

[1] Klein volt az, a ki (már 1876-ban) talán először mutatott rá arra, hogy az analysis situsban az alakzatok absolut és relativ tulajdonságai egymástól szigorúan szétválasztandók (id. h., p. 478).

[2] V. ö. Tietze: *Jahresb. d. Deutschen Math. Ver.* 19. k. (1910), p. 155 3. jegyzet.

[3] id. h. p. 36. — Steinitz t. i. «az $\mathfrak{M}^{(3)}$ térben foglalt $\mathfrak{M}^{(2)}$ felület $s^{(1)}$ élmenti oldalá»-nak fogalmát definiálja. E definiczió azonban a következő módon helyesbitendő. A két $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ csoportot, melyekre egy K cziklus (az $s^{(1)}$ élt tartalmazó háromméretű czellák összessége) felbomlik, a következő kijelentéssel kell jellemezni: «A nélkül, hogy $c^{(2)}$-n és $c_1^{(2)}$-en áthaladnánk a K cikluson belül nem lehet $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be jutni, ha ($s^{(1)}$ metszése nélkül) csak oly kétméretű czellán haladhatunk át, *melyek az $s^{(1)}$ élt tartalmazzák»*. E definiczió a háromméretű zárt alakzatoknak csupán azon tulajdonsága által válik lehetővé, mely — a Dehn-Heegaard-féle terminológiában — kimondja, hogy azok a háromméretű czellák, melyek egy meghatározott élt tartalmaznak, *egy* csoportot alkotnak. E tulajdonságot mi a következőkben nem feltételezzük és nem is értjük bele a háromméretű zárt alakzat fogalmába.

[4] Vonaldarab helyett a német «Strecke» értelmében röviden vonalat irunk. A P_1 és P_2 végpontokkal biró vonalak jelei: $(P_1P_2)_1$, $(P_1P_2)_2$ stb. A külső indexeket, ha ez nem okozhat félreértést, el is hagyjuk.

végpontja. A zárt vonalat *összefüggő*nek (vagy röviden *kör*nek) mondjuk, ha — P_1, P_2 két tetszőleges végpont (csúcspont) lévén — mindenkor van a sokaságban a vonalaknak

$$(P_1P_{i_1}),\ (P_{i_1}P_{i_2}), \ldots, (P_{i_{\nu-1}}P_{i_\nu}),\ (P_{i_\nu}P_2)$$

typusú csoportja. Valamely zárt vonal *kétoldalú*nak neveztetik, ha minden vonalának egy-egy *értelmet* (*indicatrix*ot) oly módon lehet tulajdonítani, hogy minden csúcspont egyszer mint kezdő- és egyszer mint végpont szerepeljen. Könnyen belátható, hogy *minden zárt vonal kétoldalú.* Ha tehát valamely *összefüggő zárt vonal egy* vonalához a két indicatrixa egyikét hozzárendeljük, akkor a fenti törvény ez által a zárt vonal minden vonalának meghatározza az indicatrixát, vagyis — a mint mondani fogjuk — magának a zárt vonalnak az indicatrixát is. De fordítva is: a kör indicatrixa meghatározza minden vonalának egyik indicatrixát.

Megállapodunk abban, hogy két vonal (AB) és (BC), melyeknek pontosan egy közös (B) végpontjuk van, egyetlen (AC) vonallá egyesíthető.

Ha megadjuk az elemi felületeknek egy véges sokaságát, a mely elemi felületek határait (körök) pontok vonalakra (élekre) bontják szét, akkor ez által egy *zárt felületet* értelmeztünk, ha mindezen élek pontosan két elemi felülethez tartoznak.[1] Ha most már mindezen elemi felületek határaihoz oly módon lehet két indicatrixuk egyikét hozzárendelni, hogy ez által minden élhez egyszer az egyik, egyszer a másik indicatrixát rendeltük hozzá, akkor a felület *kétoldalú;* ellenkező esetben *egyoldalú.*[2] Ismeretes módon egy- és kétoldalú felületek egyaránt léteznek. Ha valamely kétoldalú felület egyik elemi felületéhez hozzárendeljük egyik indicatrixát, akkor az élek most

---

[1] DEHN és HEEGAARD a «zárt» szót szűkebb értelemben használja (l. az 3. jegyzetet a megelőző lapon). A mi definicziónk zárt felületek singularis pontjait nem zárja ki. Hasonló megjegyzés érvényes a zárt terek stb. itt következő definiczióira is.

[2] Ez a MÖBIUS definicziója (l. c., p. 475—485).

említett «Möbius-féle törvénye» a felület minden más elemi felületének is kitünteti egyik indicatrixát. Ha egy összefüggő[1] felület minden elemi felületéhez e Möbius-féle törvénynek megfelelőleg rendeltünk egy-egy indicatrixot, akkor azt mondjuk, hogy maga a felület indicatrixszal van ellátva. Látnivaló, hogy minden összefüggő kétoldalú felület kétfélekép látható el indicatrixszal s mindkét indicatrix egyértelműleg meghatározza a felületet alkotó elemi felületek indicatrixát.

Ha az F_1 és F_2 elemi felületek határának pontosan egy közös éle van, akkor azt fogjuk mondani, hogy e közös él elhagyásával F_1 és F_2 «egy elemi felületté egyesithető». Ez utóbbit F_1 és F_2 többi élei határolják.

A kétoldalú zárt felületek között különösen az ú. n. *gömbfelületek* (vagy: *kétméretű sphaerák*) játszanak fontos szerepet. Egy felület gömbfelületnek neveztetik, ha 1. két, közös határral biró, elemi felületből áll vagy 2. «élek és elemi felületek egyesitésével» ilyen typusra hozható.

A mint a körök az elemi felületeket határolják, ép úgy a most definiált gömbfelületek is határolhatnak bizonyos alakzatokat, a melyek *elemi térrészek*nek vagy (Steinitzczel) (háromméretű) *czellák*nak neveztetnek. Ezek a vonal és elemi felület fogalmának felelnek meg.

Adva lévén egy véges sokasága az ily czelláknak, melyeknek határai (gömbfelületek) elemi felületekből vannak összerakva, ez által egy *zárt tér* értelmeztetik, ha ezen elemi felületek mindegyike pontosan két czellához tartozik. Ha minden gömbfelülethez, mely a czellákat határolja, oly módon lehet két indicatrixuk egyikét hozzárendelni, hogy ez által minden elemi felület egyszer az egyik és egyszer a másik indicatrixát nyerje, akkor a zárt tér kétoldalúnak, ellenkező esetben egyoldalúnak neveztetik. Egyoldalú zárt tér létezését egyszerű példával fogjuk igazolni. (3. §.)

Most ismét bizonyos speciális összefüggő zárt (háromméretű)

---

[1] E szó jelentése itt ép úgy értelmezhető, mint vonalakra.

tereket[1] lehet kitüntetni (a melyek a négyméretű gömbtér háromméretű felületéhez s így egyszersmind a közönséges — nem projektiv — háromméretű térhez homoeomorphak). Ezek tekinthetők mint a «*négyméretű czellák*» határai. E fogalom elvezet a «*négyméretű zárt alakzatok*» általános fogalmához, melyre — teljes analógiában a megelőzőkkel — az egy- és kétoldalúság fogalma könnyen átvihető.

Ily módon succesive eljuthatunk az «*n-méretű zárt alakzatok* ($\mathfrak{M}_n$)» fogalmához, bármily nagy positiv egész számot jelent is az n. Ezen $\mathfrak{M}_n$ alakzatok n-méretű czellákból vannak összerakva, a mely utóbbiakat bizonyos speczialis (zárt és kétoldalú) alakzatok — $n-1$-méretű sphærák — határolnak. Ha mindezen sphæráknak (mint előbb a köröknek illetve gömfelületeknek) oly módon lehet két indicatrixuk egyikét tulajdonitani, hogy az — n-edik dimensióba átvitt — Möbius-féle törvény ki legyen elégitve, akkor $\mathfrak{M}_n$ kétoldalúnak neveztetik; ellenkező esetben egyoldalúnak.

A megelőzőkben mindig *zárt* alakzatokra szorítkoztunk. Az egy- és kétoldalúság fogalma *határolt* alakzatokra is könnyen átvihető. Felesleges volna itt ennek részleteire kitérnünk.

2. §. A projektiv terek.

A következő vizsgálatok czélja annak a kimutatása, hogy az *n-méretű projektiv tér*, R_n egy- vagy kétoldalúsága az n szám paritásától függ. A fősúlyt annak a kimutatására forditjuk, hogy a háromméretű projektiv tér R_3 kétoldalú,[2] ép úgy, mint a (projektiv) egyenes R_1, ellentétben a projektiv síkkal (R_2), a mely ismeretes módon az egyoldalú felületek közé tartozik. És pedig ezeket az eredményeket közvetetlenül az 1. §-ban

---

[1] E *háromméretű sphaerák* mint a gömbfelületek direkt általanosításai értelmezhetők. A «czellák egyesitésé»-nek fogalma t. i. közvetlenül átvihető a harmadik dimenzióba.

[2] E tény impliczite bentfoglaltatik a Dehn-Heegaard-féle Encyklopædia-referátum 77. jegyzetében.

adott definicziókból fogjuk levezetni, úgy hogy vizsgálatainkban minden folytonossági meggondolás teljesen elkerültetik.

A projektiv egyenes kétoldalúsága evidens; hiszen zárt vonallal æquivalens s az utóbbiak — mint láttuk — mindenkor kétoldalúak.

A projektiv sik egyoldalúsága is közvetetlenül levezethető Möbius definicziójából. E czélból a projektiv sik először is elemi felületekre bontandó fel. Ez legegyszerűbben három — közös ponttal nem biró — egyenes által történhetik, a melyek — ha a végtelenben való összefüggésre is figyelemmel vagyunk — a projektiv síkot négy tartományra bontják fel. E négy «háromszög» valóban elemi felület, mert a «végtelen» háromszögek egymásközt, valamint a véges háromszöghöz is projektivek s így a fortiori homoemorphok. Legyen 1, 2 és 3 a három egyenes három metszéspontja. A 12 egyenest az 1 és 2 pontok két részre bontják, a véges (12) és a végtelen $(12)_1$ darabra stb. A Dehn-Heegaard-féle jelöléssel tehát a projektiv sik a következő módon adható meg, mint polyederfelület:

Csúcsok: 1, 2, 3;

Élek: $(12), (12)_1, (23), (23)_1, (31), (31)_1$;

Felületek: $\begin{cases} F_1 = [(12)\ (23)\ (31)], & F_2 = [(12)\ (23)_1\ (31)_1], \\ F_3 = [(12)_1\ (23)\ (31)_1], & F_4 = [(12)_1\ (23)_1\ (31)], \end{cases}$

[Mellesleg megjegyezzük, hogy ez a megadási mód rendkivül egyszerű módszert szolgáltat a projektiv siknak terünk véges részében való ábrázolására.[1] E czélból elegendő a $(12)_1$, $(23)_1$ és $(31)_1$ éleket is, úgy mint a többieket, teljesen a végesbe helyezni. Ekkor az F_1, F_2, F_3, F_4 elemi felületek is mind a végesben helyezhetők el és oly (3 csúcsú, 6 élű és 4 lapú)

[1] Ilyen ábrázolást először Boy adott göttingai dissertácziójában: «*Über die Curvatura integra und die Topologie der Flächen*», 1901-ben. (V. ö. azonban a következő jegyzetet.) A prokjektiv sik Boy-féle repræsentánsa singularitásnélküli felület.

polyederfelületet alkotnak, mely homoemorph a projektiv sikhoz.[1]]

Hogy most már a projektiv sik egy- vagy kétoldalúságáról dönthessünk, meg kell vizsgálnunk, hogy lehet-e az F felületeknek egy-egy indicatrixot Möbius törvényének megfelelőleg tulajdonítani. F_1-hez egyik indicatrixát például a következő módon rendelhetjük:

$$\overrightarrow{(12)}\;\overrightarrow{(23)}\;\overrightarrow{(31)}$$

a mit így is fogunk jelölni:

$$\overrightarrow{(12)\;(23)\;(31)}.$$

Ezáltal F_2 indicatrixa, miután ott (12)-nek az ellenkező $\overleftarrow{(12)}$ indicatrixot kell nyernie, a következő módon van megállapítva:

$$\overleftarrow{(12)\;(23)_1\;(31)_1};$$

$(31)_1$-nek, mint F_3 élének tehát a $\overrightarrow{(31)}_1$ indicatrix jutna s így (23)-nak, mint F_3 élének a $\overrightarrow{(23)}$ indicatrix. Ez utóbbi megegyeznék tehát azzal az indicatrixszal, melyet (23) mint F_1 éle nyert. Möbius törvénye tehát nem elégíthető ki és ezzel a projektiv sik egyoldalúsága ki van mutatva.

Ezt az ismeretes tételt csak azért vezettük le ilyen részletességgel Möbius definicziójából, mert a megfelelő kérdést a háromméretű térre vonatkozólag teljesen analóg meggondolással intézhetjük el.

A háromméretű projektiv teret négy — egymást nem egy pontban metsző — sik $2^3=8$ tetraéderre (czellára) bontja. Ezek közt egy teljesen a végesben fekszik, míg a többi hét a végtelenen

---

1 Komplikáltabb, de igen érdekes ily ábrázolást adott Steinitz a projektiv sik számára egy az oktaeder élrendszeréhez illesztett «heptaeder»-felület segítségével. (*Crelles Journal,* 130. k., p. 281). E heptaeder a *négy* egyenessel felosztott siknak felel meg. Egyébként ezt a heptaederfelületet, egy Möbiustól megadott polyederhez csatlakozva, már 1885-ben megkonstruálta Reinhardt (*Leipziger Berichte,* 37. k., p. 106), a nélkül azonban, hogy a projektiv sikkal való homoeomorphismust felemlítené.

vonul át. Ha a csúcspontokat 1, 2, 3 és 4-gyel jelöljük s az élek jelölését is úgy állapitjuk meg, mint az imént, akkor a projektiv tér, mint «polyeder»-tér a következő módon adható meg. (A nyilak egyelőre nem veendők figyelembe.)

Csúcsok: 1, 2, 3, 4.

$$\text{\textit{Élek:}}\ \begin{cases}(12),\ (13),\ (14),\ (23),\ (24),\ (34),\\ (12)_1,\ (13)_1,\ (14)_1,\ (23)_1,\ (24)_1,\ (34)_1.\end{cases}$$

Felületek:

$$\begin{array}{llll}
[(12)\,(23)\,(31)], & [(12)\,(23)_1\,(31)_1], & [(23)\,(31)_1\,(12)_1], & [(31)\,(12)_1\,(23)_1],\\
[(12)\,(24)\,(41)], & [(12)\,(24)_1\,(41)_1], & [(24)\,(41)_1\,(12)_1], & [(41)\,(12)_1\,(24)_1],\\
[(13)\,(34)\,(41)], & [(13)\,(34)_1\,(41)_1], & [(34)\,(41)_1\,(13)_1], & [(41)\,(13)_1\,(34)_1],\\
[(23)\,(34)\,(42)], & [(23)\,(34)_1\,(42)_1], & [(34)\,(42)_1\,(23)_1], & [(42)\,(23)_1\,(34)_1].
\end{array}$$

Czellák:

$$C_1=\{\overrightarrow{[(12)\ (23)\ (31)]}\ \overleftarrow{[(12)\ (24)\ (41)]}\ \overrightarrow{[(13)\ (34)\ (41)]}\ \overleftarrow{[(23)\ (34)\ (42)]}\},$$

$$C_2=\{\overleftarrow{[(12)_1\ (23)\ (31)_1]}\ \overrightarrow{[(12)_1\ (24)\ (41)_1]}\ \overleftarrow{[(13)_1\ (34)\ (41_1)]}\ \overrightarrow{[(23)\ (34)\ (42)]}\},$$

$$C_3=\{\overleftarrow{[(12)_1\ (23)_1\ (31)]}\ \overrightarrow{[(12)_1\ (24)_1\ (41)]}\ \overleftarrow{[(13)\ (34)\ (41)]}\ \overrightarrow{[(23)_1\ (34)\ (42)_1]}\},$$

$$C_4=\{\overleftarrow{[(12)\ (23)_1\ (31)_1]}\ \overrightarrow{[(12)\ (24)\ (41)]}\ \overleftarrow{[(13)_1\ (34)_1\ (41)]}\ \overrightarrow{[(23)_1\ (34)_1\ (42)]}\},$$

$$C_5=\{\overleftarrow{[(12)\ (23)\ (31)]}\ \overrightarrow{[(12)\ (24)_1\ (41)_1]}\ \overleftarrow{[(13)\ (34)_1\ (41)_1]}\ \overrightarrow{[(23)\ (34)_1\ (42)_1]}\},$$

$$C_6=\{\overrightarrow{[(12)\ (23)_1\ (31)_1]}\ \overleftarrow{[(12)\ (24)_1\ (41)_1]}\ \overrightarrow{[(13)_1\ (34)\ (41)_1]}\ \overleftarrow{[(23)_1\ (34)\ (42)_1]}\},$$

$$C_7=\{\overrightarrow{[(12)_1\ (23)_1\ (31)]}\ \overleftarrow{[(12)_1\ (24)\ (41)_1]}\ \overrightarrow{[(13)\ (34)_1\ (41)_1]}\ \overleftarrow{[(23)_1\ (34)_1\ (42)]}\},$$

$$C_8=\{\overrightarrow{[(12)_1\ (23)\ (31_1)]}\ \overleftarrow{[(12)_1\ (24)_1\ (41)]}\ \overrightarrow{[(13)_1\ (34)_1\ (41)]}\ \overleftarrow{[(23)\ (34)_1\ (42)_1]}\}.$$

[Ha az 1-es indexű élek jelentik a «végtelen» éleket, akkor C_1 itt a véges tetraéder. A C_2 (C_3, C_4, illetve C_5) jelölés e C_1-éből úgy keletkezik, hogy az 1 (illetve 2, 3, 4) számot tartalmazó éleket indexszel látjuk el. A C_6 (C_7, C_8) jelét pedig C_1-éből úgy nyerjük, hogy a (12) és (34), (illetve (13) és (24), illetve (14) és (23)) éleket kivéve, minden élnek adunk egy-egy 1-es indexet. A nyolcz tetraéder két csoportba ($\{C_1, C_6, C_7, C_8\}$

és $\{C_2, C_3, C_4, C_5\}$) osztható oly módon, hogy két különböző csoportba tartozó tetraédernek mindenkor van *egy* közös lapja, míg két tetraédernek, mely ugyanabba a négyes csoportba tartozik, közös lapjuk nincsen].

Az alkalmazott nyilak által a C_i-k minden határlapjának egy-egy indicatrixot tulajdonitottunk. Hamarosan meg lehet győződni róla, hogy e hozzárendelés a következő két követelménynek megfelelőleg történt.

1. Ha F_k és F_l a C_i-nek két oly határlapja, melyeknek egy közös élük van, akkor F_k-hoz és F_l-hez, mint C_i határlapjaihoz az indicatrix úgy van megállapitva, hogy e közös él egyszer az egyik, máskor a másik indicatrixát nyerte.

2. Minden F_k felülethez — a szerint, hogy az egyik vagy másik hozzátartozó C_i határlapjakép fogjuk fel — egyszer egyik, máskor másik indicatrixa rendeltetett).

E két követelmény kielégithetősége pedig épen a projektiv tér kétoldalúságát fejezi ki.

Az adott bizonyitásoknak egy pontja azonban még egy kiegészitő megjegyzésre szorul. Azt lehetne t. i. hinni, hogy a kétoldalúság feltételeinek kielégithetősége, illetve ki nem elégithetősége függhetne még attól a módtól is, a hogy a teret (sikot) czellákra bontottuk. Hogy ez nincsen így, azt akarjuk a projektiv sik esetére még rövidesen elintézni.

Legyen R egy tetszőleges vonalrendszer, mely a projektiv síkot elemi felületekre bontja és R' egy ugyanily tulajdonságú vonalrendszer. Ha mindkét vonalrendszert egyidejűleg rajzoljuk a projektiv síkra, akkor ez az $R+R'$ vonalrendszer szintén elemi felületekre bontja a projektív síkot.[1] Könnyen belátható, hogy ha R-re vagy R'-re nézve az élek Möbius-féle törvénye kielégithető, akkor ugyanez érvényes $R+R'$-re és viszont. Tehát vagy R-re *és* R'-re kielégithető az élek törvénye, ha t. i. $R+R'$-re kielégithető, vagy egyikükre sem. Ezen meggondolás, mely tetszőleges felületekre általánositható, valóban

---

[1] A gömbfelület kivételével ez minden felületre érvényes.

mutatja, hogy a felületek (és ép így a többméretű alakzatok) egy- vagy kétoldalúsága nem függ attól a módtól, a hogy őket czellákra bontottuk.

A DEHN-HEEGAARD-féle elméletben az utoljára elintézett kérdés fel sem vethető, miután ott az alakzatok csupán mint «polyeder»-alakzatok definiálhatók. Utolsó eredményünk helyébe ebben az elméletben a következő tétel lép: «Intern transzformácziókkal szemben az egy- vagy kétoldalúság tulajdonsága invariáns» (l. c., p. 190; bizonyítás nélkül).

Meg lehetne győződni róla, hogy a projektiv térre nézve a kétoldalúság követelményének kielégíthetősége azon alapszik, hogy a projektiv síkra e követelmény *nem* elégíthető ki. E megjegyzéssel problémánk általánosságban elintézhető. Bontsuk fel t. i. az n-méretű projektiv teret, R_n-et $n+1$ számú R_{n-1} által (melyeknek közös pontjuk nincs) czellákra (e czellák száma 2^{n+1}). A fenti megjegyzés általánosításaképen kitűnik, hogy e czelláknak lehet egy-egy indicatrixot az általánosított MÖBIUS-féle törvénynek megfelelőleg tulajdonítani, ha a megfelelő követelmény teljesitése az R_{n-1}-re nézve lehetetlen — és csakis ez esetben. Más szóval: R_n egyoldalú vagy kétoldalú a szerint, hogy R_{n-1} kétoldalú vagy egyoldalú. Miután pedig R_1 kétoldalú, azért a következő általános eredményre jutottunk:

Az n-méretű projektiv tér egyoldalú vagy kétoldalú, a szerint, hogy n páros vagy páratlan.

Mi az itt vázolt bizonyítást nem fejtettük ki részletesen, miután a relativ egyoldalúság fogalmának segítségével bizonyára egyszerűbben megfogalmazható;[1] e módszernél t. i. nem választandó külön az a két eset, midőn n páros, illetve páratlan. Csak azt kell kimutatni — páros és páratlan n-re egyaránt — hogy egy R_{n-1} az R_n-ben «R_n-hez relative egyoldalú».

[1] L. STEINITZ tételeit, melyek az absolut és relativ egyoldalúság közötti kapcsolatot kifejezik (*Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges.*, VIII. k., p. 36—37.) E tételek szigorú megalapozására STEINITZ dolgozatának III. része szolgálhat alapul, hol a «totale Inzidenzgruppe» fogalma játsza a legfőbb szerepet.

$n=2$ esetére e tételnek a következő szemléletes bizonyitása adható. Legyen E és E' a projektiv sík két egyenese, melyek egymást O-ban metszik; e két egyenes a projektiv síkot *két* tartományra bontja. E vagy E' átmetszése nélkül nem lehet egyikből a másikba jutni. Ha tehát O-ból kiindulva E egyik partján a végtelenen áthaladunk, átjutunk E másik partjára.[1]

3. §. Egyoldalú alakzatok.

Láttuk, hogy egyrészt valamennyi egyméretű alakzat, másrészt a háromméretű projektiv tér kétoldalú. Nem lesz tehát talán érdektelen oly typust megadni, mely minden méretszámra (akár páros, akár páratlan) egyoldalú zárt alakzatot szolgáltat. Mindenekelőtt tehát egy zárt egyoldalú teret[2] akarunk konstruálni. E tér mint egy egyoldalú zárt felület analogonja fog adódni. Ehhez a felülethez az ú. n. Möbius-féle szalagból kiindulva a következő módon juthatunk.

A Möbius-féle szalagot két oly keresztmetszete (12) és (34), melyek egyike sem bontja szét önmagában véve a felületet, együttesen két négyszögre (elemi felületre) bontja. A Möbius-féle szalag tehát mint polyederfelület a következőképen adható meg:[3]

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Csúcsok:} & 1,\ 2,\ 3,\ 4, \\ \textit{Élek:} & (12),\ (13),\ (14),\ (23),\ (24),\ (34), \\ \textit{Felületek:} & [(12)\ (23)\ (34)\ (41)],\ [(13)\ (34)\ (42)\ (21)]. \end{array}\right\} (M)$$

Csupán a (12) és (34) él fordul elő mindkét négyszögben; a többi él együttesen M határát alkotják; e határ az (13) (32) (24) (41) kör. Hozzávéve (M)-hez két új

---

1 Combebiac (*Comptes Rendus*, 135. k., p. 1044) is közölte egy szemléletes bizonyítását ennek a ténynek, melyet ő a projektiv sík egyoldalúságával direkte azonosnak tekint.

2 Tér = háromméretű alakzat.

3 V. ö. Dehn-Heegaard, id. h., p. 158. — E megadási módnál a Möbius-féle szalag csúcsainak és éleinek rendszere megegyezik a tetraederével.

$$(12)_1 \text{ és } (34)_1$$

typusú élt és két új elemi felületet, melyeknek typusa

$$[(12)_1 (23)(34)_1 (41)] \text{ és } [(13)(34)_1 (42)(21)_1],$$

M-ből *zárt* M' felület keletkezik, miután M' nyolcz élének mindegyike a négy elemi felület közül épen kettőben fordul elő.[1] M' egyoldalú, mert egy része, t. i. M egyoldalú.

A mint itt két négyszögből egy egyoldalú felületet állíthattunk elő, ép úgy lehet két hasábból — melyeket háromoldalúaknak akarunk választani — egy egyoldalú T teret összerakni, t. i. a következőt:

$$\left.\begin{array}{ll}
\textit{Csúcsok:} & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\,; \\
\textit{Élek:} & \begin{cases} (12), (23), (31), (45), (56), (64), \\ (14), (25), (36), (15), (24), (36)_1\,; \end{cases} \\
\textit{Felületek:} & \begin{cases} F_1=[(12)(23)(34)], & F_2=[(45)(56)(64)], \\ F_3=[(23)(36)(65)(52)], & F_6=[(23)(36)_1(64)(42)], \\ F_4=[(31)(14)(46)(63)], & F_7=[(31)(15)(56)(63)_1], \\ F_5=[(12)(25)(54)(41)], & F_8=[(12)(24)(45)(51)], \end{cases} \\
\textit{Czellák:} & C_1=(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5),\quad C_2=(F_1, F_2, F_6, F_7, F_8)
\end{array}\right\} (T)$$

[Csupán az F_1 és F_2 felület fordul itt elő mindkét czellában; a többi hat felület alkotja tehát a T tér határát (felületét). Ezen F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8 felületekben a tizenkét él mindegyike pontosan kétszer fordul elő, úgy hogy e hat elemi felület zárt felületet alkot, a melyről az is könnyen belátható, hogy egyoldalú. Egyébként e felületet — mely különben homoemorph az előbb M'-vel jelzett felülettel — mint egy önmagán áthatoló csőfelületet már többen vizsgálták, mint egyszerű példáját egyoldalú zárt felületeknek.[2]]

---

[1] A Möbius-féle szalagot már *egy* elemi felülettel $[(13)(32)(24)(41)]$-gyel zárttá lehet kiegészíteni. Ez az eljárás azonban nem vihető át a harmadik dimenzióba. Ott t. i. a Möbius-féle szalag határának *egyoldalú* felület fog megfelelni és így ez nem alkothatja egy czella határát.

[2] Először Klein (*Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen.* Leipzig, 1882; p. 80).

A T tér egyoldalúsága könnyen belátható: ha C_1-nek és C_2-nek egy-egy indicatrixát oly módon választjuk, hogy ez által F_1 a két különböző indicatrixot nyeri, akkor F_2-nek mindkétszer ugyanaz az indicatrix jut.

Egészitsük ki a T teret a következő két új felülettel:

$$F_9 = [(12)(23)(31)]_1 \quad \text{és} \quad F_{10} = [(45)(56)(64)]_1$$

és a következő két új czellával:

$$C_3 = (F_9, F_{10}, F_3, F_4, F_5) \quad \text{és} \quad C_4 = (F_9, F_{10}, F_6, F_7, F_8).$$

Az így keletkező tér először is zárt lesz, mert a tíz felület mindegyike a négy czella közül épen kettőben fordul elő, másodszor pedig egyoldalú, mert az egyoldalú T tér mint rész foglaltatik benne. E tér bizonyára a legegyszerűbb[1] példája az egyoldalú zárt tereknek.

Az utoljára adott eljárás successive kiterjeszthető bármily magas méretszám esetére. Ily módon bármily n-re az n-méretű egyoldalú zárt alakzatok egy-egy igen egyszerű példáját nyerjük. Valamennyi négy n-méretű czellából van összerakva.

Kőnig Dénes.

---

[1] Még *rövidebb* megadási módját nyertük volna *ugyanezen* térnek, ha a «háromoldalú hasáb»-ok helyett kétoldalúakat alkalmaztunk volna. Azért választottuk mégis a háromoldalúakat, hogy az élek jelölésénél fellépő indexek számát lehetőleg korlátozzuk, mi által a jelölés áttekinthetőbbé válik.

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL ÉS BIZONYOS VELÖK ÖSSZEFÜGGŐ HATÁROZOTT INTEGRÁLOKRÓL.

(Első közlemény.)

Tartalomjegyzék.

Jelen dolgozat alapját és leglényegesebb tartalmát azon tény következetes alkalmazása képezi, hogy bizonyos valószinűségek, egyszerű és természetes módon, n dimenziós térfogatok, illetve két ily térfogat viszonya által mérhetők.

Ezen felfogás mathematikai eredménye, hogy az elemi valószinűségszámitás egy használatos módszere, a «fonctions génératrices», vagy mint magyarosan mondhatjuk, a generátor-függvények módszere úgy módosítható, hogy határozott integrálok kiszámítására szolgálhat.

Kitűnik továbbá, hogy a

$$\frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}} dx$$

határozott integrál elmélete az n dimenziós elemi geometriának egy kérdését képezi.

A valószínűség elméletére nézve pedig az az eredmény, hogy a kérdések egy csoportja egységes módon lesz tárgyalható, ugyanolyan n dimenziós konstrukcziókkal, ugyanolyan generátor-függvények, ugyanolyan trigonometrikus integrálok segítségével. Különösen kettőre hívom föl a figyelmet: a nagy számok POISSON-féle törvényének tárgyalására és a XI. fejezetre, a hol sorok összetartásának valószinűségéről és hasonló kérdésekről lesz szó.

A generátor-függvények módszerét tulajdonképpen már POISSON[1] módosította a jelzett irányban, ha nem is éppen határozott integrálok kiszámítására használta föl. MAURER[2] és BIERENS DE HAAN[3] bizonyos formulákra jutottak, a melyekből mint speciális esetek adódnak ki jelen dolgozat legfontosabb formulái; igaz, hogy ők, más czél felé törekedve, ezen speciális eseteket nem vették észre; MAURERnek l. c. egy határátmenetére is vissza kell majd térnünk. E dolgozat leglényegesebb gondolata és ennek mintegy korolláriumát képező leglényegesebb formulája, habár mindkettő csak speciális esetben is, megvan SOMMERFELD[4] egy rövid dolgozatában; szerző mindezen irodalom ismerete nélkül dolgozott eredetileg, de reméli, hogy említett dolgozatok mellett is marad munkájában valami *novum*.

---

[1] POISSON: Recherches sur la probabilité des jugements. Paris, 1837.

[2] MAURER: Mittelwerthe der Functionen einer reellen Variablen. Math. Ann. 47. 263—280. o.

[3] BIERENS DE HAAN: Nouvelles tables d'intégrales définies. Table 371. No. 5. — Exposé de le théorie ... et des méthodes d'évaluation des intégrales définies 1860—1862. 344—346. o.

[4] SOMMERFELD: Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes. Boltzmann Festschrift. 848—859. o.

I.

MOIVRE problémája igy fogalmazható: egy urnában m golyó van, megszámozva 1-től m-ig; az urnából n-szer húzunk, húzás előtt mindig visszadobva az előbbi húzásnál kihúzott golyót; mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott n szám összege ne legyen nagyobb mint s?

LAPLACE a további kérdést fűzte hozzá: ha a golyók száma, m, végtelenül növekszik, micsoda határérték felé közeledik a mondott valószínűség, föltéve, hogy az $\frac{s}{m} = r$ viszony fix marad (ha kedvező eseteknek mindig azokat tekintem, a melyekben a kihúzott számok összege a golyók számának r-szeresét nem lépi túl). Mi ezen feladatokat visszavezetjük az n dimenziós elemi geometria megfelelő feladataira.

Valamely n húzásra mi kihúzhattuk $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokat, a hol

$$y_1 = 1 \text{ vagy } 2 \text{ vagy } 3 \text{ vagy} \ldots \text{ vagy } m,$$
$$y_2 = 1 \text{ vagy } 2 \text{ vagy } 3 \text{ etc.} \ldots \text{ vagy } m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = 1 \text{ vagy } 2 \text{ vagy } 3 \text{ etc.} \ldots \text{ vagy } m.$$

Oszszuk föl az n dimenziós tér «egységkoczkáját» a koordinátasikokhoz parallel sikokkal (összes számuk mn)

$$x_1 = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots, \frac{m}{m},$$
$$x_2 = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots, \frac{m}{m},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots, \frac{m}{m}.$$

Akkor, ha az első húzásnak az első koordinátatengely, a második húzásnak a második koordinátatengely, az n-ik húzásnak az n-ik koordinátatengely felel meg, az m^n különféle lehetséges húzási sorozatnak m^n pont felel meg, a melyek valamennyien az egységkoczkába esnek és az imént meghúzott

mn sík közül valamilyen n síkon feküsznek; t. i. egyszerűen az $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ húzási sorozatnak az $\left(\frac{y_1}{m}, \frac{y_2}{m}, \ldots, \frac{y_n}{m}\right)$ pontot feleltetjük meg.

Egy koczka «legnagyobb sarkának» nevezzük azon pontját, a melynek egyetlen koordinátája sem kisebb, mint bármely más pontjának megfelelő koordinátája; akkor minden koczkát legnagyobb sarkának feleltetvén meg, azt is mondhatjuk, hogy az m^n húzási eshetőségnek m^n egyenlő, t. i. $\left(\frac{1}{m}\right)^n$ kiterjedésű koczka felel meg, a melyek összesen az egységkoczkát maradék nélkül kitöltik.

Ha $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ egy kedvező húzás, akkor

$$y_1+y_2+\cdots+y_n \leqq s = rm,$$

vagyis

$$\frac{y_1}{m}+\frac{y_2}{m}+\cdots+\frac{y_n}{m} \leqq \frac{s}{m} = r.$$

Azaz, ha egy húzás kedvező, akkor a megfelelő pont, éppen úgy, mint az $\left(\frac{1}{m}\right)^n$ kiterjedésű koczka, a melynek ezen pont a legnagyobb sarka, az

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = r$$

síknak azon oldalán fekszik, a melyiken a koordináták kezdőpontja.

A keresett valószínűséget megkapjuk, ha a kedvező $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ húzások számát elosztjuk m^n-el; azaz, ha az $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ sík mondott oldalán levő metszéspontjait az említett mn síknak megszámoljuk és számukat elosztjuk m^n-el; vagy ha ezen mn sík által az egységkoczkából kivágott $\left(\frac{1}{m}\right)^n$ térfogatú koczkák közül azoknak a számát veszszük, a melyek legnagyobb sarka az $x_1+x_2+\cdots+x_n = r$ sík mondott oldalán fekszik és számukat megszorozzuk egynek a térfogatával, más szóval, ha megalkotjuk összkiterjedésüket.

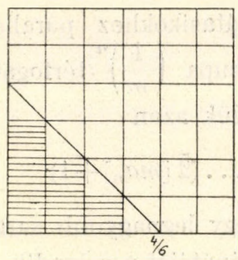
Ezen összkiterjedés Moivre problémájának a megoldása; Laplace problémájának megoldását úgy kapjuk, ha m-et végtelenül növeljük, azaz a beosztást végtelenül szaporítjuk; tehát Laplace problémájának megoldása az integrál

$$\int\int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

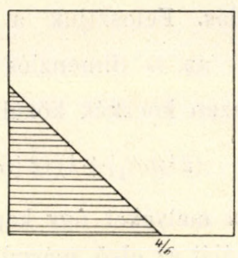
kiterjesztve az n dimenziós tér azon tartományára, a hol minden $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pont koordinátái eleget tesznek az egyenlőtlenségeknek

$$0 \leqq x_1 \leqq 1,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1, \dots, 0 \leqq x_n \leqq 1,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq r.$$



1*a*. ábra.



1*b*. ábra.

P. o. Moivre problémájának megoldása, ha

$$n = 2, \quad m = 6, \quad s = 4, \quad \frac{s}{m} = r = \frac{2}{3}$$

és Laplace problémájának megoldása, ha

$$n = 2, \quad m = \infty, \quad s = \infty, \quad \frac{s}{m} = r = \frac{2}{3}$$

a mellékelt ábrákon vonalkázással megkülönböztetett felületek által van ábrázolva. (1. ábra.)

A kapott térfogat értéke különben egy bizonyos geometriai valószínűség (l. XI. 4.).

Már mostan a következőkben megkiséreljük a Laplace feladatának megoldását képező térfogat kiszámítását, az éppen előadott megoldás menetét követve, a valószínűségszámítás szokásos módszerei szerint; a számítás azonban általánosabb esetben is keresztülvihető.

II.

Feladat. Nevezzük (R_n)-nek az n dimenziós tartományt, a melyet a következő föltételek határolnak el:

$$-a_1 \leqq x_1 \leqq +a_1, \quad -a_2 \leqq x_2 \leqq +a_2, \dots, \quad -a_n \leqq x_n \leqq +a_n,$$
$$-a_{n+1} \leqq x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq +a_{n+1}.$$

Kiszámítandó az integrál

$$\underset{(R_n)}{\int\int\dots\int} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Megoldás. Felosztjuk a koordinátasíkokhoz parallel síkok segélyével az n dimenziós teret csupa $\left(\frac{1}{m}\right)^n$ térfogatú koczkára és ezen koczkák közül kiveszszük azon

$$(2[ma_1]+1)(2[ma_2]+1)\dots(2[ma_n]+1)$$

koczkát, a melyeket úgy kapunk, hogy legnagyobb sarkuk első koordinátáját az első, második koordinátáját a második, ... n-ik koordinátáját az n-ik sorából választjuk ki tetszésszerint a következő táblázatnak:

$$x_1 = -\frac{[ma_1]}{m}, \; -\frac{[ma_1]-1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}, \; 0, \; \frac{1}{m}, \dots, \frac{[ma_1]}{m},$$

$$x_2 = -\frac{[ma_2]}{m}, \; -\frac{[ma_2]-1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}, \; 0, \; \frac{1}{m}, \dots, \frac{[ma_2]}{m},$$

. . . .

$$x_n = -\frac{[ma_n]}{m}, \; -\frac{[ma_n]-1}{m}, \dots, -\frac{1}{m}, \; 0, \; \frac{1}{m}, \dots, \frac{[ma_n]}{m}.$$

Ezen koczkák közül is csak azokat tartjuk meg, a melyek legnagyobb sarkai $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eleget tesznek a föltételnek

$$-\frac{[a_{n+1}m]}{m} \leqq x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq \frac{[a_{n+1}m]}{m}.$$

Azaz, ha

$$x_1 = \frac{i_1}{m}, \; x_2 = \frac{i_2}{m}, \dots, x_n = \frac{i_n}{m},$$

$$_1+i_2 i+\cdots+i_n = -[ma_{n+1}], \; -[ma_{n+1}]+1, \dots, -1, \; 0, \dots, [ma_{n+1}].$$

Mindezen koczkák összes térfogatát képezve $m = 1, 2, 3, \ldots$ esetében, egy sorozatot nyerünk, a melynek limese a keresett többszörös integrál.

Egy koczka térfogatát ismervén $\left(= \frac{1}{m^n}\right)$, feladatunk a koczkák számát meghatározni.

Ha a szorzatot

$$(e^{-[ma_1]\, i\alpha} + \cdots + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + \cdots + e^{[ma_1]\, i\alpha})$$
$$(e^{-[ma_2]\, i\alpha} + \cdots + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + \cdots + e^{[ma_2]\, i\alpha})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(e^{-[ma_n]\, i\alpha} + \cdots + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + \cdots + e^{[ma_n]\, i\alpha})$$

kiszorozzuk, azon koczkának, a melynek legnagyobb sarka

$$\left(\frac{i_1}{m}, \frac{i_2}{m}, \ldots, \frac{i_n}{m}\right)$$

meg fog felelni a kiszorzott kifejezés ezen tagja:

$$e^{i(i_1+i_2+\cdots+i_n)\alpha}.$$

Tehát azon bizonyos koczkák számát meghatározni ugyanazon feladat, mint a szorzat $e^{i\alpha}$ hatványai szerint való kifejtésében

$$e^{-[ma_{n+1}]\, i\alpha},\ e^{-([ma_{n+1}]-1)\, i\alpha}, \ldots,\ e^{-i\alpha},\ 1,\ e^{i\alpha}, \ldots,\ e^{[ma_{n+1}]\, i\alpha}$$

együtthatóinak összegét képezni. Tekintve azonban, hogy

$$\begin{aligned}
e^{-\nu i\alpha} + \cdots + e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} + \cdots + e^{\nu i\alpha} &= \frac{e^{-\nu i\alpha} - e^{(\nu+1)\, i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \\
&= \frac{e^{-(\nu+\frac{1}{2})\, i\alpha} - e^{(\nu+\frac{1}{2})\, i\alpha}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} \\
&= 1 + 2\cos\alpha + \cdots + 2\cos\nu\alpha \\
&= \frac{\sin(2\nu+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

feladatunk így is megfogalmazható: a kifejezés

$$\frac{\sin(2[ma_1]+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{\sin(2[ma_2]+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdots\frac{\sin(2[ma_n]+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$$

kifejthető cosinussorba pozitiv egész együtthatókkal; képezzük

$$1,\ \cos a,\ \cos 2a,\ \cos 3a, \ldots, \cos[ma_{n+1}]\,a$$

együtthatóinak összegét. Ezen összeg a cosinusok orthogonalitását a szokásos módon fölhasználva, így írható:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(2[ma_1]+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdots$$

$$\cdots\frac{\sin(2[ma_n]+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}(1+2\cos a+\cdots+2\cos[ma_{n+1}]\,a)\,da.$$

Tehát m-t határtalanul növelve

$$\int\int\ldots\int_{(R_n)} dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$=\lim\left(\frac{1}{m}\right)^n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{\sin(2[a_\nu m]+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot da$$

$$=\lim\frac{1}{m^n}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{\sin(2[a_\nu m]+1)\,a}{\sin a}\cdot da$$

$$=\lim\frac{1}{m^n}\,\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{\sin(2[a_\nu m]+1)\,a}{\sin a}\cdot da,$$

Ezen határértéket fogjuk lépésről-lépésre átalakitani; ezen átalakitásokban sokszorosan felhasználjuk az elemi tényt, hogy $\frac{\sin a}{a}$ a $(0, \pi)$ intervallumban monoton csökkenő és pozitiv.

Lemma. *Legyen* $\varphi(m, a)$ *egy függvény, a mely abszolute egy fix korlát alatt marad, akármilyen nagy szám is* m, *ha csak* $0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$, $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ *pozitiv állandók, akkor*

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m^\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(a, m) \left(\prod_{i=1}^{\nu} \frac{\sin 2\,[ma_i]\, a}{a} \right) da = 0.$$

Elegendő bebizonyitani, hogy

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{m^\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{|\sin 2\,[ma_i]\, a\,|}{a}\, da = 0.$$

Ezen limes azonban így írható:

$$\lim \frac{\prod_{i=1}^{\nu} 2\,[ma_i]}{m^\nu} \int_0^{\frac{1}{m}} \prod_{i=1}^{\nu} \frac{|\sin 2\,[ma_i]\, a\,|}{2\,[ma_i]\, a}\, da +$$

$$+ \lim \frac{1}{m^\nu} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{\nu} |\sin 2\,[ma_i]\, a\,|}{a^\nu}\, da \leqq$$

$$\leqq 2^\nu a_1 a_2 \ldots a_\nu \lim \frac{1}{m} + \lim \frac{1}{m^\nu} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\nu} = 0$$

mivelhogy

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^\nu} = \begin{cases} \log \frac{\pi}{2} m, & \nu = 1, \\ \frac{1}{\nu - 1} \left(m^{\nu-1} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\nu-1} \right), & \nu = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Már most vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{\sin(2[ma_i]+1)\,a}{\sin a} = \sin 2[ma_i]\,a\cdot\operatorname{cotg} a + \cos 2[ma_i]\,a =$$

$$= \frac{\sin 2[ma_i]\,a}{a} + \sin 2[ma_i]\,a\left(\operatorname{cotg} a - \frac{1}{a}\right) +$$

$$+ \cos 2[ma_i]\,a =$$

$$= \frac{\sin 2[ma_i]\,a}{a} + \varphi_i(m, a),$$

a hol $\varphi_i(m, a)$ (vagy akárhány hasonlónak a szorzata) az előrebocsátott lemma föltételeit teljesiti. Ha az utoljára nyert kifejezést evaluálandó limesünkbe behelyettesitjük, a szorzást elvégezve 2^{n+1} tagot kapunk, a melyek közül az első

$$\frac{1}{m^n}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\sin 2[ma_i]\,a}{a}\,da.$$

Lemmánkból következik, hogy a következő $2^{n+1}-2$ tag limese 0; az utolsó tag limese más, könnyen látható okokból szintén 0.

Elvégezve a helyettesitést:

$$2ma = x$$

az egyetlen megmaradó tag ezen formát nyeri:

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi m} \frac{\sin\frac{[ma_1]}{m}x \ldots \sin\frac{[ma_{n+1}]\,x}{m}}{x^{n+1}}\,dx.$$

Már most megint:

$$\frac{\sin\frac{[ma_i]}{m}x}{x} = \frac{\sin a_1 x}{x} +$$

$$+ \frac{[ma_i]-ma_i}{m}\cos\frac{[ma_i]+ma_i}{2m}x\,\frac{\sin\frac{[ma_i]-ma_i}{2m}x}{\frac{[ma_i]-ma_i}{2m}x} =$$

$$= \frac{\sin a_i x}{x} + \frac{1}{m}\,\psi_i(m, x),$$

a hol (minden reális m és x értékek mellett) $\psi_i(m, x)$ abszolut értékben nem nagyobb mint 1; behelyettesitve evaluálandó kifejezésünkbe, 2^{n+1} tagot kapunk, a melyek közül az első

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi m} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}}\, dx.$$

A következő $2^{n+1}-2$ tag limese 0; hiszen

$$\lim \frac{1}{m}\int_0^{\pi m} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = 0$$

az utolsó tag pedig hasonló okokból lesz zérus, mint az imént vizsgált esetben, figyelembe vévén, hogy $n>0$, tehát $n+1$ legalább is $=2$.

Így jutottunk az egyenlőséghez [1]

$$\underset{(R_n)}{\int\int\ldots\int} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}}\, dx.$$

Korollárium. Legyen (R'_n) halmaz elhatárolva az $n+1$ egyenlőség által:

$$-a_1 \leqq x_1 \leqq a_1, \quad -a_2 \leqq x_2 \leqq a_2, \ldots, \quad -a_n \leqq x_n \leqq a_n,$$

$$-a_{n+1} \leqq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leqq a_{n+1},$$

akkor

---

[1] SOMMERFELD l. c. megmutatja, hogy

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} = h, \quad a_{n+2} = x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{1}{2h}\right)^{n+1} \underset{(R_{n+1})}{\int\int\ldots\int} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi h}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^{n+1} \cos\frac{x\mu}{h}\, d\mu.$$

Ezen speciális esettől eltekintve, az egyenlőség tudomásom szerint az irodalomban ismeretlen.

$$\iint_{(R'_n)} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{2^{n+1}}{\pi \,|\, a_1 a_2 \ldots a_n \,|} \int_0^\infty \frac{\sin a_1 \,|a_1|\, x \ldots \sin a_n \,|a_n|\, x \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}} \, dx.$$

III.

Feladat. Legyen (S_n) halmaz elhatárolva az egyenlőtlenségek által:

$$0 \leqq x_1 \leqq a_1, \; 0 \leqq x_2 \leqq a_2, \ldots, 0 \leqq x_n \leqq a_n,$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq a_{n+1}.$$

Kiszámitandó az integrál:

$$\iint_{(S_n)} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

A koordinátasikokhoz parallel síkokkal $\left(\frac{1}{m}\right)^n$ térfogatú koczkákra osztva az n dimenziós teret, a koczkák körül, a melyek legnagyobb sarkai

$$x_1 = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{[a_1 m]}{m},$$

$$x_2 = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{[a_2 m]}{m},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{[a_n m]}{m},$$

ki kell választanunk mindazokat, a melyek legnagyobb sarka $\left(\frac{i_1}{m}, \frac{i_2}{m}, \ldots, \frac{i_n}{m}\right)$ olyan tulajdonságú, hogy

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0 \text{ vagy } 1 \text{ vagy } 2 \text{ vagy } \ldots \text{ vagy } [a_{n+1} m].$$

Ezen koczkák számát megállapitani ugyanazon feladat, mint a következő szorzatnak:

$$(1+z+z^2+\cdots+z^{[a_1m]})(1+z+z^2+\cdots+z^{[a_nm]})\ldots$$
$$\ldots(1+z+z^2+\cdots+z^{[a_nm]})=$$
$$=\frac{1-z^{[a_1m]+1}}{1-z}\cdot\frac{1-z^{[a_2m]+1}}{1-z}\cdots\frac{1-z^{[a_nm]+1}}{1-z}$$

z növekvő hatványai szerint való kifejtésében meghatározni

$$1,\ z,\ z^2,\ldots,\ z^{[a_{n+1}m]}$$

együtthatóinak összegét.

Jelentsen C egy a komplex számsíkon a $z=0$ pontot körülvevő görbét, akkor a keresett m így is írható:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1-z^{[a_1m]+1}}{1-z}\cdots$$
$$\cdots\frac{1-z^{[a_nm]+1}}{1-z}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^{[a_{n+1}m]+1}}\right)dz=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{1-z^{[a_\nu m]+1}}{1-z}\cdot\frac{dz}{z^{[a_{n+1}m]+1}}.$$

Legyen C az egységkör, azaz

$$z=e^{i\alpha},\quad dz=izd\alpha,\quad z^{\frac{1}{2}}=e^{i\frac{\alpha}{2}},$$

akkor ezen kifejezés így is írható:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{1-z^{[a_\nu m]+1}}{1-z}\cdot\frac{d\alpha}{z^{[a_{n+1}m]}}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{z^{-\frac{[a_\nu m]+1}{2}}-z^{\frac{[a_\nu m]+1}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}}\,z^{\frac{1}{2}([a_1m]+\cdots+[a_nm]-[a_{n+1}m])}\,d\alpha=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{\sin([a_\nu m]+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos([a_1m]+\cdots-[a_{n+1}m])\frac{\alpha}{2}\cdot d\alpha=$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\prod_{\nu=1}^{n+1}\frac{\sin([a_\nu m]+1)\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos([a_1m]+\cdots-[a_{n+1}m])\,\alpha\cdot d\alpha$$

tekintettel arra, hogy $\sin x$ páratlan és $\cos x$ páros függvény. Ez tehát a koczkák száma; elosztva m^n-el és határértékét véve $m=\infty$ esetére, megkapjuk, mint az imént vizsgált esetben, hogy

$$\int\int\ldots\int_{(S_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int^{\infty} \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}} \cdot \cos(a_1 + \cdots + a_n - a_{n+1})\, x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_n x \sin(a_1 + \cdots + a_n)\, x}{x^{n+1}}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_n x \sin(2a_{n+1} - a_1 - \cdots - a_n)\, x}{x^{n+1}}\, dx.$$

IV.

A mint (R_n) és (S_n) integráczió-területek esetében a

$$\begin{array}{llll} 1, & \cos a, & \cos 2a, \ldots, & \cos na, \ldots \\ 1, & z & z^2, \quad \ldots, & z^n, \quad \ldots \end{array}$$

függvényrendszereket alkalmaztuk, épp úgy alkalmazhatnók, ha az integráczió területe ezen egyenlőtlenségek által:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqq 0,$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqq a$$

volna elhatárolva, az

$$\frac{1}{1^s}, \frac{1}{2^s}, \ldots, \frac{1}{n^s}, \ldots$$

függvényrendszert; a megadott módszerrel ugyanis bármely

$$\int\int\ldots\int \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

alakú integrált $\big((R_n)$ esetében mindenesetre csak a $\varphi_i(x)$ függvények páros voltát kötve ki$\big)$, a mely a mondott tartományok valamelyikére van kiterjesztve, átalakíthatunk egy egyszerű integrál határértékévé, a mely integrál a második és harmadik esetben komplex értékekre van kiterjesztve. Sok kilátása a módszernek ugyan nincs, tekintve az integráljel alatt álló funkcziók várható bonyolultságát; a kevés eredményt pedig, a mit mégis elérni képes, úgy látszik, DIRICHLET szakadó faktorának alkalmazása sokkal gyorsabban hozza meg.

Induljunk ki MAURERnek[1] egy kissé általánosított formulájából; számítsuk ki ugyanis az integrált

$$\int\int\dots\int f(x_1+x_2+\dots+x_n)\,dx_1 dx_2\dots dx_n,$$

a hol az integráczió területe a «parallelepipedon»

$$-a_1\leqq x_1\leqq +a_1,\quad -a_2\leqq x_2\leqq +a_2,\dots,\quad -a_n\leqq x_n\leqq +a_n$$

x_n helyett vezessük be az új variábilist, u-t,

$$x_1+x_2+\dots+x_n=u.$$

Akkor, ha $a_1+a_2+\dots+a_n=A$-val, az új integráczió-terület lesz

$$-a_1\leqq x_1\leqq +a_1,\dots\ -a_{n-1}\leqq x_{n-1}\leqq +a_n,\quad -A\leqq u\leqq +A,$$
$$-a_n\leqq u-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}\leqq +a_n.$$

Ha az integráczió-terület első n elhatárolását az egyszerű integrálok határaiban, míg az utolsó elhatárolást egy szakadó faktor által veszszük tekintetbe, egyúttal az integrácziók sorrendjét is alkalmasan megváltoztatva, sokszoros integrálunk így írható:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\mu\int_{-A}^{+A} f(u)\,du\int_{-a_{n-1}}^{+a_{n-1}} dx_{n-1}\dots$$
$$\dots\int_{-a_1}^{+a_1} dx_1\cdot\cos\,(x_1+x_2+\dots+x_{n-1}-u)\,\mu\cdot\frac{\sin a_n\mu}{\mu}\,.$$

Azonban

---

[1] l. c. csak az az eset van tekintetbe véve, ha a parallelepipedon koczka

$$a_1=a_2=\dots=a_n=h.$$

$$\int_{-a_1}^{+a_1} \left(\cos\,(x_1+\cdots+x_{n-1}-u)\,\mu\right) dx_1 =$$

$$= \frac{\sin\,(a_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-u)\,\mu - \sin\,(-a_1+x_2+\cdots+x_{n-1}-u)\,\mu}{\mu}$$

$$= 2\,\frac{\sin a_1\mu}{\mu}\cos\,(x_2+\cdots+x_{n-1}-u)\,\mu$$

és ezen lépést $n-1$-szer megtéve

$$\int_{-a_1}^{+a_1}\int_{-a_2}^{+a_2}\cdots\int_{-a_n}^{+a_n} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{2^n}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1\mu \ldots \sin a_n\mu}{\mu^n}\,d\mu \int_{-A}^{+A} f(u)\cos \mu u \cdot du.$$

Legyen már most

$$f(u) = 1, \quad \text{ha} \quad -a_{n+1} \leqq u \leqq +a_{n+1}$$

és $=0$, ha u ezen intervallumon kivül esik; ezen értéket behelyettesitve, előbbi eredményünkkel formában is megegyező eredményt nyerünk, föltéve, hogy $a_{n+1} \leqq A$; ezen levezetésnek éppen azon hátránya van a 2. pontban közölttel szemben, hogy nem ad oly rögtöni felvilágositást az integrál:

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_{n+1} x}{x^{n+1}}\,dx$$

értékéről, ha

$$a_1+a_2+\cdots+a_n < a_{n+1}.$$

Maurer formuláján egy könnyű változó-cserét végezve, levezethetnők a III. eredményét is.

Az így kapott formulák baloldala, a többszörös integrál, egyszerűbb, mint a jobboldal, a végtelen egyszeres integrál; ez utóbbinak theoriája vissza van így vezetve az n dimenziós elemi geometria egy egyszerű kérdésére, egy térfogat kiszámítására; azt hiszem, nem lesz tanulságtalan ezen elemi geometriai kérdést, a melynek bizonyos valószínűségszámitási érdeke is van, a határozott integrálok tárgyalásában használatos methodusok szerint megoldani.

V.

Bierens de Haan [1] egy nevezetes formulájának egy minket ezen a helyen egyedül érdeklő speciális esetét akarjuk levezetni; csak csekélységgel kell általánosítanunk egyikét a módszereknek, a melyek az egyenlőség

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \operatorname{sgn} a = \begin{cases} -1 & a<0 \\ 0 & a=0 \\ +1 & a>0 \end{cases}$$

kimutatására szolgálnak; a_1, a_2, a_3,...-ról a következőkben csak a realitást fogjuk föltételezni.

Vizsgáljuk a szorzatot

$$(e^{ia_1x}-e^{-ia_1x})(e^{ia_2x}-e^{-ia_2x})\dots(e^{ia_nx}-e^{-ia_nx}) =$$
$$= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} (-1)^\nu e^{i(\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\dots+\varepsilon_n a_n)x}.$$

A 2^n összeadandót, a melyeket úgy kapunk, hogy a kifejezésben

$$\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\dots+\varepsilon_n a_n$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ az összes lehetséges értékrendszereket végigfutja, a hol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, szakítsuk 2^{n-1} csoportra, a hol minden csoport két tagot tartalmaz, t. i. olyan két tagot, a melyek egyikében $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ értékrendszer minden eleme éppen ellentétje a másikban levő $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ értékrendszer megfelelő elemének; tehát, ha a csoport egyik tagjánál ix együtthatója pozitiv, a másik tagjánál negativ lesz és ha mondott együttható az egyik tagban zérus, akkor a másikban is zérus lesz; ha az egyik tagnál $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ értékrendszerben ν negativ egység van, akkor a másik tagban $n-\nu$. Már most én minden csoportból visszatartok egy-egy tagot; t. i. ha ix együtthatója

[1] Nouvelles tables d'intégrales définies. Table 371. No. 5. Exposé ... des méthodes d'évaluation des intégrales définies 344—346. o. található módszert követi jelen dolgozat VII. 5. Utalás történik részletesebb fejtegetésekre *Archief van het Genootschap «Een onvermoeide arbeid etc.» Deel 1. Stuk 2, 3*, a mely munkához nem tudtam hozzájutni.

a két tagban különböző, azt a tagot tartom meg, a melyikben pozitiv; ha ix együtthatója a két tagban egyező, akkor mindkettőben zérus és akkor a tagok közül visszatartok egy meghatározottat, de mindegy, hogy melyiket. Az így kiválasztott 2^{n-1} tagból megalkotott összeget így fogjuk jelölni

$$\sum (-1)^{\nu} e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n) x},$$

a hol ν az exponensben előforduló negatív ε_i-k számát jelenti; ezen jelöléssel tehát

$$(e^{ia_1x} - e^{-ia_1x})(e^{ia_2x} - e^{-ia_2x}) \dots (e^{ia_nx} - e^{-ia_nx}) =$$
$$= \sum \left\{(-1)^{\nu} e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n) x} + (-1)^{n-\nu} e^{i(\mp a_1 \mp a_2 \mp \cdots \mp a_n) x}\right\}.$$

Vegyük már most külön a két esetet, a mikor n páros és a mikor n páratlan; azt állítom, hogy

$$\sum (-1)^{\nu} e^{(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{2n}) ix}$$

x hatványai szerint való kifejtésében

$$1, x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n-2}$$

együtthatói zérusok, míg viszont

$$\sum (-1)^{\nu} e^{(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{2n+1}) ix}$$

x hatványai szerint való kifejtésében

$$x, x^3, x^5, x^7, \dots, x^{2n-1}$$

együtthatói zérusok.

Tényleg a függvénynek

$$(e^{ia_1x} - e^{-ia_1x})(e^{ia_2x} - e^{-ia_2x}) \dots (e^{ia_{2n}x} - e^{-ia_{2n}x}) =$$
$$= \sum (-1)^{\nu} \left\{{}^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{2n}) x} + e^{-i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{2n}) x}\right\} =$$
$$= (-1)^n 2^{2n} a_1 a_2 \dots a_{2n} x^{2n} + \cdots$$

az $x=0$ pont $2n$-szeres zérushelye; azaz

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^{2n-1}$$

együtthatói zérussá válnak; azonban a *páros* hatványok együtthatói pontosan kétszeresei a megfelelő együtthatóknak

$$\sum (-1)^{\nu} e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{2n})x}$$

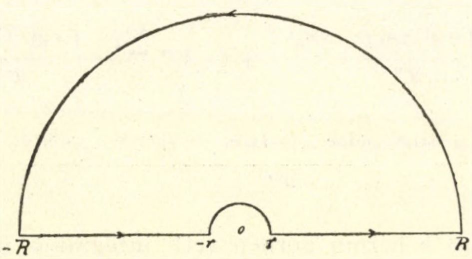
x hatványai szerint való kifejtésében, úgy, hogy ez utóbbi kifejtésben a páros hatványok együtthatói x^{2n-2} együtthatójáig bezárólag, szintén zérussá válnak. Hasonlóan okoskodunk, ha $a_1, a_2, \ldots$ páratlan számban vannak, segélyül véve az identitást

$$(e^{ia_1x} - e^{-ia_1x})(e^{ia_2x} - e^{-ia_2x}) \ldots (e^{ia_{2n+1}x} - e^{-ia_{2n+1}x}) =$$
$$= \sum (-1)^{\nu} \left\{ e^{i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{2n+1})x} - e^{-i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{2n+1})x} \right\}.$$

Már most vizsgáljuk az integrált

$$\int \frac{\sum (-1)^{\nu} e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n)x}}{x^n} dx$$

kiterjesztve a komplex számsik ide rajzolt zárt görbéjén (2. ábra)



2. ábra.

A félkörök a zéruspontból mint középpontból vannak leírva, a számsík azon felében, a hol x imaginárius koordinátája nem negativ; legyen továbbá $\lim R = \infty$, $\lim r = 0$.

1. A végtelen nagy félkörön vett integrál zérus, egy jól ismert kriterium szerint; ugyanis a míg n legalább is 2, addig

$$x = \xi + i\eta,$$

$$\eta \geqq 0, \quad (\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n)\eta \geqq 0,$$

$$\left| e^{i(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n)x} \right| = e^{-(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n)\eta} \leqq 1.$$

2. Hogy a végtelen kis félkörön integrálhassunk, a 0 pont környezetében Laurent-sorba fejtünk.

A reguláris rész integrálja zérus.

A poláris részben csak *páratlan exponensek* fordulnak elő; az exponensekhez: 3, 5, 7, 9, 11,... tartozó tagok integrálja zérus, mert hiszen egy a nullapont mint középpont körül húzott tetszésszerinti félkörön

$$\int \frac{dx}{x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n}\frac{1}{x^{2n}}\Bigg|_{-z}^{+z} = 0.$$

Úgy hogy az integrál ezen részének értéke a negativ előjellel vett fél reziduum, azaz

$$-\pi i \frac{i^{n-1}\sum(-1)^{\nu}(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n)^{n-1}}{n-1!}.$$

3. A két egyenesvonalú, a reális tengelyen vett integrál pedig összesen:

$$\lim_{r=0}\int_r^{\infty}\left\{\frac{\sum(-1)^{\nu}e^{i(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)x}}{x^n} + (-1)^n\frac{\sum(-1)^{\nu}e^{i(\mp a_1 \mp \cdots \mp a_n)x}}{x^n}\right\}dx =$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{(e^{ia_1x}-e^{-ia_1x})(e^{ia_2x}-e^{-ia_2x})\dots(e^{ia_nx}-e^{-ia_nx})}{x^n}dx.$$

Mivel azonban a három görbén vett integrálok összege zérus, πi^n-el osztva és a sinusokat bevezetve kapjuk, hogy:

$$\frac{2^n}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin a_1x \sin a_2x \dots \sin a_nx}{x^n}dx =$$

$$= \frac{\sum(-1)^{\nu}(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n)^{n-1}}{n-1!},$$

a hol a jobboldalon álló összeg tehát igy értendő: a kifejezésben:

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ fussanak végig minden lehetséges értékrendszeren, a hol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$; az igy keletkező 2^n kifejezésből csak azokat tartom vissza, a melyek számértéke pozitiv, tehát általában 2^{n-1}-et és sohasem többet: ezeket használom föl a summa képzéséhez; végül ν jelenti azon ε-ok számát, a melyek a rákövetkező kifejezésben -1-el tétették egyenlővé.

Korollárium. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ pozitivok

$$\int\int\cdots\int_{(R_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{\sum(-1)^{\nu}(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{n+1})^n}{n!}.$$

Pólya György.

A FOLYADÉKCSEPP ALAKULÁSÁNÁL FELLÉPŐ ELEKTROMOSSÁG.

I. Bevezetés.

A légköri elektromosság keletkezésének oka és módja évszázadok óta vizsgálat tárgyát képezi. Az utolsó évszázadok mindegyike meghozta erre vonatkozó hypothesisét, nem ritkán több alakban, úgyannyira, hogy ma már negyvennél többre rúg a komoly hypothesisek száma. E tény eléggé mutatja a kérdés fontosságát és érdekességét.

E hypothesisek közül csupán egyről kivánok említést tenni, a mely 1782-ből VOLTÁ-tól ered s a mely az itt tárgyalandó kérdéssel szoros összefüggésben van.

VOLTA [1] a légköri elektromosság keletkezésének okát a víz elpárolgásában látja s azt állítja, hogy a víz egyszerű elpárolgása elektromosságfejlődéssel kapcsolatos. Erre vonatkozó vizsgálatait megelőzőleg (1769) a chemiai gázfejlődésnél is elektromosságfejlődést vélt találni, de ekkor még sikertelenül s csak később de la PLACE-szal és LAVOISIER-rel együtt 1782-ben ismételt kisérleteinél eredménnyel.

Később POUILLET [2] és TAIT et WANKLYN [3] VOLTA hypothesisét erősítették meg, a nélkül azonban, hogy a párolgásnál fellépő elektromosság keletkezésének okát megtalálták volna.

Több évtizeddel ezután LENARD FÜLÖP, a vízeséseknél keletkező elektromosság okának vizsgálataiból [4] kifolyólag oly theo-

---

[1] VOLTA: «Phil. Trans.» 1782. év 15. k. 274. old.

[2] POUILLET: «Ann. de Chim. et de phys.» 1827. év. 35. k. 401. old.

[3] TAIT et WANKLYN: «Phil. Mag.» 1862. év 25. k. 494. old.

[4] LENARD: «Wied. Ann.» 1892. év 46. k. 584. és köv. old.

riát állapitott meg, a mely teljesen új, igen jelentős megállapításai mellett VOLTA hypothesisét is támogatja és annak sok tekintetben magyarázatát adja.

II. Lenard alapvető vizsgálatai.

LENARD az Alpok több vízesése mellett vizsgálta meg a levegő elektromosságtartalmát s az elektromosság mineműségét s azt mindig negativnak találta, bár kisérleteit úgy száraz, mint nedves időben végezte.

Különböző magasságú helyről, más és más sebességgel aláhulló vízesés változó mennyiségű elektromossággal töltötte meg a levegőt, még pedig teljesen a leeső víz sebessége arányában. Az elektromosság kiindulóhelyéül a vízesés lábát találta.

S éppen e miatt ELSTER- és GEITEL-nek[1] hasonló irányú vizsgálatai alapján felállitott theoriájával e jelenség nem volt összeegyeztethető, mert hiszen ők e jelenséget a földpotential változásával magyarázták s elektromos megosztás eredményének tekintették, de LENARD kisérleteinek és theoriájának közlése alapján ők maguk is megváltoztatták e felfogásukat.[2]

A természetes vízeséseken végzett megfigyelései után LENARD laboratoriumában ismételte meg kisérleteit, hogy a jelenség okát adhassa.

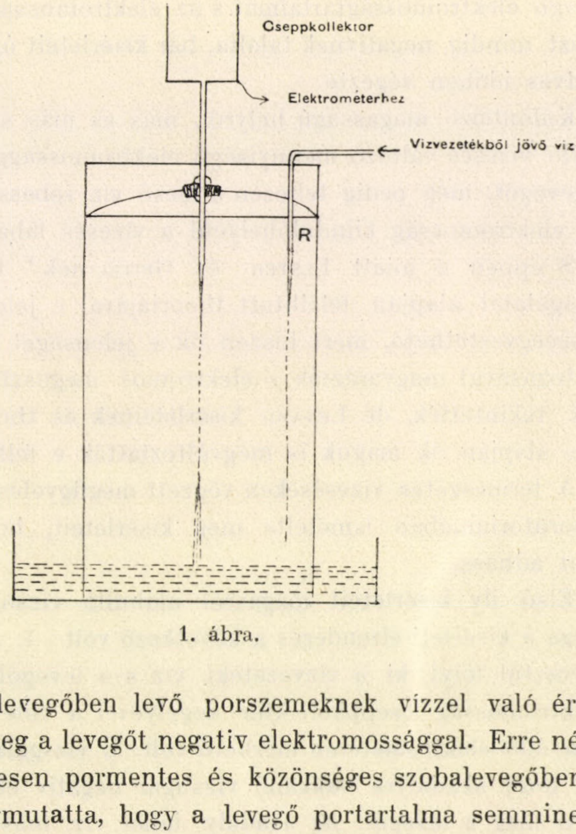
Első ily kisérleteit magasról aláhulló vízsugárral végezte. Maga a kisérleti elrendezés a következő volt: 1. ábra. *R* csövön keresztül folyt ki a vízvezetéki víz s a levegőben keletkezett elektromosság cseppkollektor segélyével a vele összeköttetésben álló elektrometeren mérhető volt. E vizsgálatok eredménye az, hogy akadályra bukkanó vízsugár negativ elektromossággal tölti meg a levegőt. Az akadály lehet víz, más folyadék, vagy szilárd test, azonban a fejlődő elektromosság az akadály halmaz-

[1] ELSTER és GEITEL: «Wien. Ber.» 1890. év 99 k.; EXNER's Rep. 1891. év 27. k. 419. old.

[2] ELSTER és GEITEL: «Ann. d. Phys.» 47. kötet 496. old.

állapotától is függ. Hasonló eredményre jutottak MACLEAN és MAKITA GOTO[1] már előzőleg egy a levegő elektromos állapotát vizsgáló kisérletüknél, a nélkül azonban, hogy e jelenségnek messzebbmenő súlyt tulajdonitottak volna.

Minthogy a vízzel érintkezésbe jutó szilárd testek legnagyobb része negativ elektromosságot nyer, arra lehetett gondolni,



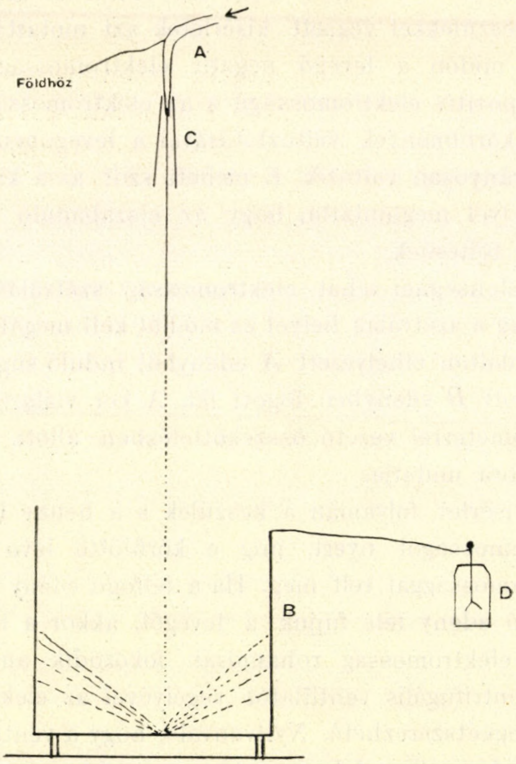
1. ábra.

hogy talán a levegőben levő porszemeknek vízzel való érintkezése tölti meg a levegőt negativ elektromossággal. Erre nézve kísérleteit teljesen pormentes és közönséges szobalevegőben is végezte s megmutatta, hogy a levegő portartalma semminemű befolyással nincs az elektromosság fejlődésére, a mit már a természetes vízeséseknél is megállapitott.

Nagyon lényeges azonban, hogy a víz milyen tiszta. E czél-

[1] MACLEAN és MAKITA GOTO: «Phil. Mag.» 1890. 30. köt. 140. old.

ból desztillált vízzel, vízvezetéki vízzel és konyhasóoldattal végzett kísérletei azt mutatták, hogy a desztillált víz negyvenszer oly magas potentiálra emelte a levegőt, mint a vízvezetéki víz, mindig negativ elektromossággal töltvén el a levegőt, míg a konyhasó oldatnál nagyon gyenge, de positiv töltést nyert a



2. ábra.

levegő; ez utóbbinál az érték nem volt állandó. Eme megfigyelés igen jelentős szerepet játszott a jelenség magyarázatánál, mint azt később látjuk.

E kisérletek egész határozottsággal azt mutatták, hogy a levegőn keresztül menő s akadályra bukkanó vízsugár a levegőt negativ elektromossággal tölti meg. Az a kérdés, hogy az ugyanakkor keletkező egyenlő mennyiségű positiv elektromosság hol foglal helyet? Erre nézve legelőször a vizet vizsgálta meg. A kisérleti elrendezést a 2. ábra mutatja.

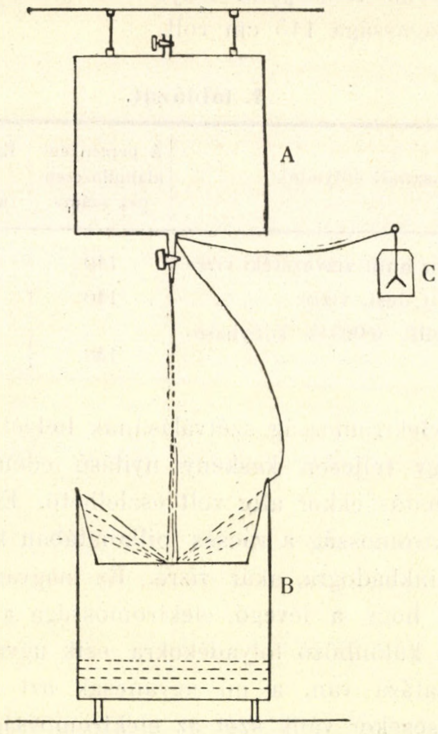
A csövön keresztül jön a víz, mely a *C* compensáló csövön keresztül a *B* felfogó edénybe ömlik, mely isoláló állványon foglal helyet s a *D* elektrometerrel vezető összeköttetésben van.

E készülékkel végzett kisérletek azt mutatták, hogy ugyanakkor, midőn a levegő negativ elektromosságot nyer, a víz maga positiv elektromosságú s az elektromosság mennyisége a külső körülmények változtatásával a levegőben és a folyadékban arányosan változik. E mellett szól ama kisérletsorozat is, a melylyel megmutatta, hogy az elszabaduló vízporszemek is positiv töltésűek.

E jelenségnél tehát elektromosság szétválásáról van szó, a hol még a szétválás helyét és módját kell megállapitani. E czélból isoláltan elhelyezett *A* edényből induló sugarakat isoláltan felállított *B* edényben fogott fel. A két víztartály egymással s elektrometerrel vezető összeköttetésben állott. Az elrendezést a 3. ábra mutatja.

A kisérlet folyamán a készülék s a benne levő víz positiv elektromosságot nyert, míg e körülötte levő levegő negativ elektromossággal telt meg. Ha a felfogó edény nyilásától a csepegtető edény felé fújjuk a levegőt, akkor a levegőben eddig talált elektromosság rohamosan fokozódik annyira, hogy egy kis czentrifugális ventillator segélyével az elektromos mennyiség megkétszerezhető. Nyilvánvaló, hogy a ventillatio segélyével a levegő negativ elektromossága nagyobb mértékben válik el a víz positiv elektromosságától.

Háromféle folyadékkal (desztillált víz, vízvezetéki víz, concentrált konyhasó oldat) végzett kisérletek azt mutatták, hogy a folyadék töltése mindig ellentett a levegő töltésével. Ha három nyiláson folyhatott ki a víz, háromszor oly rövid idő alatt lépett fel a hatás, illetőleg háromszor oly nagy volt az. Több nyilású zuhany azonban már nem bizonyult a vizsgálatokhoz alkalmasnak, mert a sugarak összefolynak. A leeső sugarak már útjuk első harmadában cseppekké estek szét, a mi, ha nem történt meg, kisebbedett a hatás. Ennek okát az akkori kísérletek alapján abban látták, hogy a hosszabb sugár jobban szellőztette a felfogó edényt. E mellett azonban szerepet játszik az útközben kifejlődő elektromosság is, a minek magyarázatát később leirandó kisérleteimnél látjuk.



3. ábra.

Az elektromos hatás cseppeknél sem maradt el. E czélból egy üvegből szabályos cseppek estek a 3 m mélységben elhelyezett felfogó edénybe. Az üveg vezető összeköttetésben állott a felfogó edénynyel. Másodperczenként 2 csepp esett, melyeknek átmérője 4·4 mm. E cseppek nem vittek magukkal levegőt a víz alá s éppen ezért ugyanaz volt a hatás, akár zinkbádogra, akár 5 cm mély vízfelületre is hullottak a cseppek.

A felfogó edény ventillatiója itt is fokozta a levegő elektromosságát s majdnem kétszeresre emelte azt. Az esési magasság növekedtével növekedett a hatás is. Ugyancsak növekedett az a csepp átmérőjének nagyobbodásával.

Az 1. táblázatban nehány kisérletsorozatnak eredményét foglaltam össze, a melyet erre vonatkozólag ugyanily elrendezéssel végeztem. A cseppek súlya 0·07 gr, átmérője 5·11 mm s az esés magassága 145 cm volt.

1. táblázat.

A használt folyadék	A percenként aláhulló cseppek száma	Egy csepp által fejlesztett elektromos mennyiség Coulomb
Vízvezetéki viz hullt vízvezetéki vízre	140	$+0{,}047.10^{-12}$
Dest. víz hullt dest. vízre — — — —	140	$+0{,}702.10^{-12}$
Dest. víz- hullt 0·025 % konyhasó-oldatra — — — — — — — — — —	140	$+0{,}011.10^{-12}$

Hogy az elektromosság szétválásának helyét megállapitsa, a cseppeket egy teljesen keskeny nyilású edényben fogta fel. Elektromos hatás ekkor alig volt észlelhető. Ebből az látható, hogy az elektromosság a ráesés pillanatában keletkezik, essék a viz akár zinkbádogra, akár vízre. Ez magyarázza meg azt a megfigyelést, hogy a levegő elektromossága a vízesés lábától indul ki. Ha különböző folyadékokra esik ugyanaz a folyadék, különböző hatása van, a mi ugyancsak azt mutatja, hogy a folyadék ráesésekor válik szét az elektromosság.

A folyadékcsepp a folyadékra való esése után alámerül teljes csepp alakjában s többet felszínre nem jön, mint azt Worthingtons[1] kimutatta. S így az elektromosságnak akkor kell szétválnia, midőn a csepp a viz felületére esik.

A folyadéknak különböző szilárd tárgyakra való esése következtében elváló elektromos mennyiségek egyenlő nagyok azok-

[1] Worthingtons: «Proc. Roy. Soc.» 1882. év. 34. k. 219. és köv. oldalain.

nál a szilárd testeknél, melyek megnedvesithetőek. Egészen más volt a hatás a meg nem nedvesíthető testeknél (viasz, paraffin, schellack).

A megnedvesithető testek között különleges viselkedést mutatott a posztó, a mely a levegőt igen jól magába veszi és átengedi. Ez igen kicsiny hatást mutat. Ugyanígy viselkedik a vastag lemezpapír

Hogy a leesésnél keletkező elektromosság nem azonos a testeknek vízzel való dörzsölése közben fellépő elektromossággal, azt mutatja az a tény, hogy a legtöbb test vízzel való dörzsölése közben negativ elektromos lesz. A leeső víz azonban a felfogó edényen positiv elektromosságot létesít s a levegőt tölti meg negativ elektromossággal. Azonkívül oly testek, melyek vízzel való dörzsöléskor különböző mértékben lesznek elektromosakká, itt a víz leesésénél egyenlő mértékű elektromosságra tesznek szert (például üveg és márvány).

Ama eredménynyel, hogy az elektromosság először a víz leesésénél lép fel, összhangban van az a körülmény, hogy a szabadon kifolyó vízsugáron ezt az elektromosságot kimutatni egyáltalán nem sikerült. Ha azonban a kifolyó víz elé valamilyen tárgyat tartottak s az reá pattant, a levegő negativ elektromossága azonnal jelentkezett.

Egy csepp annál több elektromosságot fejleszt, minél nagyobb a sebessége és minél nagyobb az átmérője. Éppen úgy a vízsugár által kifejlesztett elektromosság is csak a vízsugárban levő cseppek számától, sebességétől és nagyságától függ.

Ha a víz különböző gázokban esik, különböző elektromos potential lép fel. A világító gázban a hatás a levegőnek 0·864, az oxigénben 0·646-szorosa volt.

A különböző folyadékok hatása más és más. Ha a desztillált víz hatását a + egységnek veszszük, akkor

a terpentin hatása	—1·987
az æther hatása	+0·008
4% glaubersó oldat hatása	—0·760
a higanyé	+14·30.

Az alkohol hatása igen kicsiny: +0·123. Igen különböző a konyhasó hatása. Ez telítettségétől függ. Így a +0·011% konyhasóoldat majdnem teljesen hatástalan. A konyhasó összes telítettebb oldatai negativ elektromosakká lesznek. Leghatékonyabb a 6·5% oldat.

Ezeknek a megfigyeléseknek és kísérleteknek magyarázatát LENARD a következőképen adja:

A gázzal érintkező folyadékfelület elektromos kettős réteg székhelye. Az egyik a folyadék egynemű, a másik a gáz ellentett nemű elektromossága. A kettős réteg okát vagy a folyadéknak gázzal való érintkezésében vagy a különböző számú atomokból álló kétféle vízmolekulák elektromos töltésében kell keresnünk.[1]

Ha a folyadékcsepp akadályra talál, akkor a szabad cseppfelület egy részének eltünése folytán a kettős réteg mechanikus úton elválik, mint ez a dörzsvillanygépnél is történik.[2] Ez vezet a kétféle elektromosság térbeli elválasztásához, feltéve, hogy a felületváltozás rövidebb időn belül következik be, mintsem, hogy a kétfelé elválasztott elektromosság újból való egyesülése bekövetkezhetnék. Minél gyorsabban történik a folyadékfelület eltünése s minél nagyobb mértékben, annál több elektromosság fejlődhetik.

PASCHEN kisérletei[3] szerint a higany és az elektrolitek határfelületén az összes elektromosság kifejlődéséhez a másodpercz ezredrésze szükséges. S így felvehetjük, hogy ugyanannyi idő kell elvesztéséhez is. A gyengébb sugárnál 0·0003 sec., az erősebb sugárnál 0·00005 sec. szükséges a csepp részbeni eltünéséhez LENARD adatai alapján. Ez alatt az idő alatt 9·7 mm^2 felület változik meg és $0{\cdot}206 \,.\, 10^{-12}$ Coulomb elektromos tömeg lesz szabaddá s így egy cm^2-re $2{\cdot}1 \,.\, 10^{-12}$ Coulomb jutna. Két

---

1 LENARD: «Heidelb. Akad. Ber.» 1910. év 18. füz. 7. old.

2 K. HELMHOLTZ: «Wied. Ann.» 1879. év 7. k. 337. old. és G. MEYER: «Wied. Ann.» 1890. év 40. k. 262. old.

3 PASCHEN: «Wied. Ann.» 1890. év. 41. k. 801. old.

ellentett ily tömeg két kondenzátor-lemezen, melynek távolsága $^1/_{106}$ mm $2\cdot4 . 10^{-6}$ Volt potentiálkülönbséget ad s így csak igen csekély potentiálkülönbségnek kell a víz és a levegő érintkezése alkalmával jelen lennie, hogy a jelenség meglegyen. E jelenség alapfeltételeként tehát a folyadékfelületnek valamely gázban való hirtelen eltünését kell tekintenünk. Ennek alapján várható volt, hogy a jelenség egész általánosságban mindenütt fellép, a hol valamely folyadékfelület gázban hirtelen eltűnik.

A későbbi vizsgálatok eredményei ezt a feltevést igazolják.[1]

III. A folyadék szétporlódása és elszakadása közben fellépő elektromosság.

Lenard magyarázata alapján folyadékfelület hirtelen eltünése elektromosságfejlődéssel kapcsolatos. A folyadékfelület eltünése következik be a cseppalakulásnál is, akár szétszakadás, vagy szétporlás, akár elszakadás következtében jön az létre.

A szétporlásnál fellépő elektromosságot először Barus C. állapította meg 1903-ban[2] bár már Wesendonk[3] és H. A. Wilson[4] is megvizsgálták e jelenséget, de behatóbb kísérleteket csak Eve[5] végzett, melynek eredményeképen úgy találta, hogy a folyadék (ő már különböző folyadékokat vizsgált meg) szétporlása alkalmával a levegőben úgy positiv, mint negativ elektromosságot vivő részecskék találtatnak, még pedig a legtöbb esetben egyenlő mennyiségben. Pomeroy[6] ezt úgy magyarázza, hogy a szétporló folyadéknál az elektromos kettős réteg

---

1 Becker: «Über die Elektrizitätsentwicklung durch Änderung flüssiger Oberflächen in Gasen.» Jahrbuch der Radioakt. und Elekt. 1912. 9. füz. 1. 52. old.

2 C. Barus: Sill. J. 1903. 15. k. 105. old.

3 Wesendonk: Wied. Ann. 1894. 51. k. 353. old.

4 H. A. Wilson: Phil. Mag. (5) 1898. 45. k. 454. old.

5 A S. Eve: Phil. Mag. (6) 1907. 13. K. 248. old.

6 I. C. Pomeroy: Phys. Rev. 1908. 27. k. 492. old.

elválása csupán a szétporlás helye után következik be s így a szétszóró edény elektromosságot nem nyer, de a levegőbe került vizszemcsék tartalmazzák a positiv elektromosságot, míg a levegő negativ elektromossággal telt. Megmutatta ezt olyképen, hogy a levegőt a szétszóró készülékből konczentrált kénsavon vezette abba a térbe, a hol a mérés töétént s itt nem volt többé positiv elektromosságot vivő részecske a levegőben kimutatható.

Simpson [1] a folyadékcseppeknek kisebb cseppekké való szétesését vizsgálta meg s úgy találta, hogy 7·8 mm átmérőjű csepp kisebb cseppekké való szétesése közben $1{\cdot}7 \,.\, 10^{-12}$ Coul. elektromosságot fejleszt. Ha tekintetbe veszszük, hogy Lenard kísérletei alapján egy ily nagyságú csepp, ha 7·7 cm/sec. végsebességgel esnék, $2{\cdot}8 \,.\, 10^{-12}$ Coul. elektromosságot fejlesztene, akkor úgy találjuk, hogy eme hatás az akadályra eső folyadékcsepp által fejlesztett elektromosságnak majnem kétharmad része. A levegő elektromosságát ugyanekkor kevesebbnek találta, a minek magyarázatát a levegőben levő elektromosságvivő részecskéknek a mérőeszközig való eljutása közben előfordulható elveszésében keresi.

A kérdés teljes megvilágítása a cseppeknek az anyafolyadéktól való elszakadása közben kinálkozott legtöbb sikerrel elvégezhetőnek. Hogy eme processusnál is fellép elektromosság kettéválása, azt már Holmgren [2] említi, a nélkül azonban, hogy bővebben foglalkoznék vele. Ugyanezt a kérdést vizsgálta meg Trübi [3] s úgy találta, hogy az elektromosság intenzitása függ a folyadékcsepp nagyságától s így az eltünő folyadékfelület nagyságától is.

A jelen sorok irója ugyancsak e kérdés kisérleti megvilági-

---

1 G. C. Simpson: Phil. Trans. A. 1909. 209. k. 379. old.

2 K. A. Holmgren: Mém. de la société physiograph. de Lund, séances du 12 avril 1893, et du 14 nov. 1894. Nyomt. 1895 júniusában.

3 O. Trübi dissertatiója, Heidelberg, 1912 febr. Kivonatosan közölve Becker i. m. 84. és köv. oldalain.

tásával foglalkozott s kísérleteinek menetét s eredményeit a következőkben közli.[1]

1. Kísérleti berendezés.

A kísérleti berendezés lényegében az volt, melyet hasonló vizsgálatokra TRÜBI használt. Azonban eme elrendezés a bevezető kisérletek alapján nem teljes mértékben mutatkozott alkalmasnak s ezért igen sok tekintetben módositanom kellett. Ez újabb elrendezést a 4. ábra mutatja.[2] A vizsgálandó folyadék *A* víztartó edényben van, mely *B* borostyánlábakkal szigetelő állványon áll. Egyes cseppek a szabályozható *C* kettős csapon át a *D* csepegtető üvegcső végén hullanak ki. Ezeket az *O*, *T* nyilású és *S* kifolyásra szolgáló csappal ellátott felfogó edényben gyűjtjük. Az egész esési út *(DT)*, valamint az isolált alkatrészek a földdel összekötött rézcsövekben állanak. A *D* csepegtető cső szigetelt és légzáró elhelyezésű. Hogy külső elektromos mezőt is hozhassunk a csepegtető cső közelébe, az *I* rézcső a *P* vagy *R* csavar segélyével tetszőleges feszültségre hozható. A csillámmal fedett, kivülről fémmel elzárható *EE'''* és *E'E''* nyilásokon keresztül lehet az elszakadó folyadékcseppet megfigyelnünk.

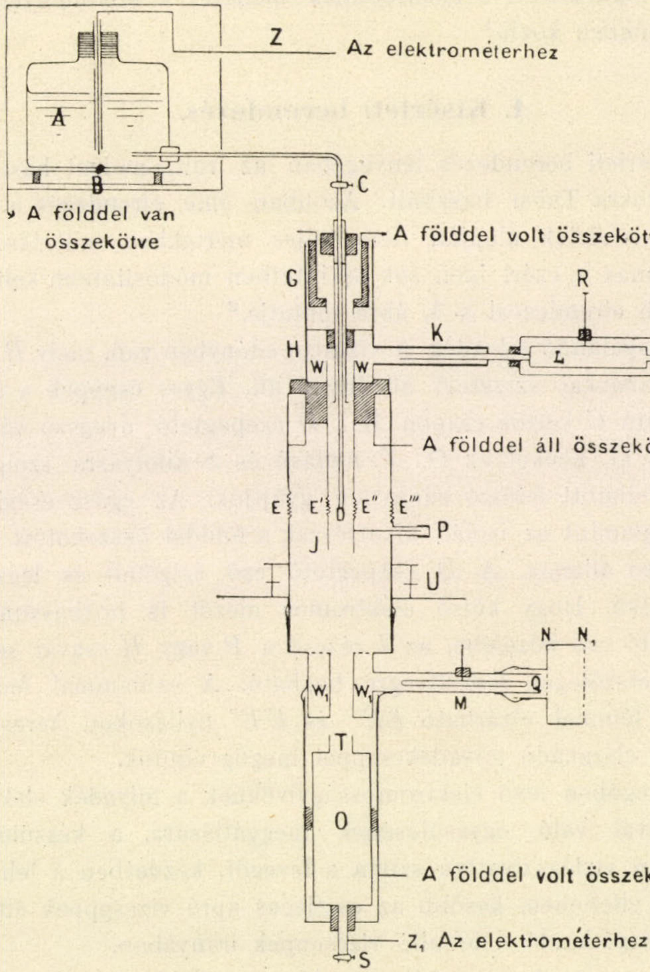
A levegőben levő elektromosságvivőknek a folyadék elektromosságával való egyesülésének meggátlására, a készüléken állandóan vízlégszivattyú szívta a levegőt, kezdetben a lehulló cseppek ellenében, később az esetleges apró vízcseppek eltérítését meggátlandó a lehulló vízcseppek irányában.

Hogy a port s esetleges idegen elektromosságvivőket elkerüljük, a készülékbe belépő levegőnek *Q* elektromos mezőn

---

[1] A köv.-ben leirandó kisérleteket az 1911—12. tanévben a heidelbergi egyetem fizikai intézetében végeztem. Legyen szabad e helyen is az intézet vezetőjének, LENARD FÜLÖP, egyetemi tanár úrnak és BECKER A. egyetemi tanár úrnak lekötelező jóakaratukért és támogatásukért hálás köszönetet mondanom.

[2] L. K. v. BERNOLÁK: Wied. Ann. 1912. 39. k. 497. old.



4. ábra.

és NN_1 vattaszűrőn, vagy az L vattaszűrőn kellett keresztülhaladnia.

Hogy a légáram egyenletesen haladjon a készüléken át, erre szolgált a WW_1 szélkamra.

Eme elrendezéssel úgy a folyadékban fellépő elektromosságot, valamint a levegőben a megfelelő ellentett értelmű elektromosságot is lehetett kimutatni. A folyadék elektromosságának mérésekor az elektrometeren a Z és Z_1-gyel összefüggő részek voltak, a készülék többi része a földdel állott kapcsolatban. E kapcsolással a cseppkollektor-hatást kerültem el. A levegő elektromosságának kimutatásakor az elektrometeren az a vattaszűrő volt, a melyen keresztül a levegőáram a készülékből távozott s így a vattaszűrő a levegőnek a készülékben nyert elektromosságvivőit felfogta és a vele összeköttetésben álló elektrometeren kimutatta. A mérés kezdetben egy egyfonalas elektrometerrel (Elster és Geitel)[1] történt, a mely azonban a mérésekhez elegendő érzékenységűnek nem bizonyult, ezért is kisérleteim nagyrészét quadrans elektrometerrel (Doležalek) végeztem, melynek érzékenysége majdnem állandóan egy voltnak megfelelő feszültségkülönbségnél 300—400 milliméter kitérést mutatott.

Kisérleteim folyamán desztillált vizet használtam, melynek tisztasága állandóan ellenőrzés alatt állott, még pedig olyképen, hogy a folyadék ellenállását határoztam meg a Kohlrausch-féle eljárással[2] s a folyadék vezetőképessége ebből volt meghatározható. Az ellenőrző és összehasonlító folyadék telitett gypszoldat volt. A folyadék ellenőrzése mindig az A víztartó edénybe való beöntése előtt történt és a mérések folyamán használt desztillált víz megközelitőleg egyenlő tisztaságúnak bizonyult. Több esetben megmértem a kísérlet végeztével a készülékből kikerülő folyadék vezetőképességét is és az alig javult valamivel, a mi a készülék állandó belső tisztasága mellett szól és e vizsgálatok szempontjából igen fontos.

A csepegtető csövet a készülékbe való helyezése előtt fluorsavval tisztitottam meg, hogy a cseppeknek az üvegcső megnedvesedése folytán, szabályszerű kifejlődése lehetséges legyen.

Az egész készülék függőleges állásának biztositására, a mi a

---

1 L. Phys. Zeitschrift 10. 1909. No. 19. 664. old.

2 L. Kohlrausch u. Holborn: «Leitvermögen der Elektrolyte» 41., 111., 115. és 204. old.

cseppek szabályos leesése szempontjából fontos, a felső rész M asztalon állott, a mely csavarokkal szabályozható.

2. Bevezető kísérletek.

Az első kisérletcsoportot 0·8 mm vastagfalú üvegcsövekkel végeztem. A csövek alsó részének nyilása különböző nagy volt s így a kifolyó cseppek nagysága is különböző volt. A cseppek esési magassága (az ábrában a DT távolság) 105 cm volt. A légáram, melyet két vízlégszivattyú szolgáltatott, a cseppek esési iránya ellenében folyt. A kisérletek e formájában reprodukcziói voltak Trübi kisérleteinek.[1] Az általam végzett kísérletek mérési eredményeit a 2. táblázat mutatja.

2. táblázat.

1	2	3	4	5	6	7	8
A percenként leeső cseppek száma:	A cseppek súlya:	A cseppek átmérője	A cseppek felülete	Egy csepp által a vízben fejlesztett elektr. mennyiség Coulomb	Egy csepp által a levegőben fejlesztett elektr. mennyiség Coulomb	Az 5. alatti rovat a felület egységre számítva	A 6. alatti rovat a felület egységre számítva
	gr	mm	cm²			Coulomb/cm²	Coulomb/cm²
60	0,098	5,72	1,03	$+8,10.10^{-14}$	$-4,34.10^{-14}$	$+7,88.10^{-14}$	$-4,32.10^{-14}$
240	0,098	5,72	1,03	$+4,32.10^{-14}$	$-2,25.10^{-14}$	$+4,32.10^{-14}$	$-2,16.10^{-14}$
60	0,079	5,32	0,89	$+5,47.10^{-14}$	$-3,99.10^{-14}$	$+6,16.10^{-14}$	$-4,48.10^{-14}$
240	0,079	5,32	0,89	$+3,52.10^{-14}$	$-2,66.10^{-14}$	$+4,00.10^{-14}$	$-2,96.10^{-14}$
60	0,049	4,43	0,62	$+2,55.10^{-14}$	$-3,02.10^{-14}$	$+4,14.10^{-14}$	$-4,35.10^{-14}$
240	0,049	4,43	0,62	$+1,73.10^{-14}$	$-1,59.10^{-14}$	$+2,80.10^{-14}$	$-2,56.10^{-14}$

E táblázatból kiolvasható, hogy az eredmények Trübi eredményeivel legtöbb tekintetben megegyeznek, csupán a felületegységre számított elektromos mennyiség e jelen kisérleteknél a folyadékcsepp nagyobbodásával nagyobbodást, míg nála kisebbedést mutat. Ez annak a jele, hogy az elektromosság fejlődé-

---

[1] Becker i. m. 84. oldal.

sét a jelen esetben tekintetbe még nem vett tényezőben kell keresnünk.

Eme kisérleteknek a csepegtető cső falának vastagsága a folyadékcsepp elszakadása pillanatában a vízporszemnek igen tetemes keletkezését okozza s ezáltal a jelenség valódi képét egészen megváltoztatja. S ez mutatja már, hogy ily parányi vízcseppeknek fontos szerepük van s ezek nagyobb vagy kisebb számban való jelenléte a szétváló elektromos mennyiségre lényeges befolyást gyakorol. Hogy ily apró vízcseppek e kisérleteknél tényleg a levegőbe és ezáltal a cseppek iránya ellenében folyó levegőárammal[1] részben a csepegtető csövet körülvevő rézcső falára, részben pedig magába a vattaszűrőbe is kerültek, eosin-festékkel bekent szűrőpapiron kimutatható volt. A vízporszemek a folyadék elektromosságát csökkentik s hogy mégis a levegő elektromosságát eme kisérleti berendezés mellett mindig 30—50%-tel kisebbnek találtam, mint ugyanakkor a víz elektromosságát, teljesen érthető, ha meggondoljuk, hogy a levegő elektromosságvivői a vattaszűrőig való menetelükben egy a földdel összekötött rézcsőben haladtak s így részben elvesztették elektromosságukat.

Ezen zavaró körülmények folytán ez eredményekből általánosításokat vonnunk nem lehet s nem találjuk megerősítését a már jelzett Trübi-féle következtetéseknek sem. A következő kisérletcsoportnak czélja tehát az volt, hogy ezen zavaró körülményeket elkerülvén, kizárólag a folyadékcsepp elszakadása által előidézett elektromos mennyiséget mérjük meg, különös figyelmet fordítván ama másodrendű cseppekre, melyeket az eddigi kisérleteknél figyelembe nem vettek.

3. Elektromos kisérletek vékonyfalú csővel.

A továbbiakban használt csepegtető csövek (kicsiny és középnagy cseppek számára) falvastagsága 0·2 mm volt. A levegő

---

[1] L. Lenard: «Meteorol. Zeits.» 1904. 6. f. 249—262. old.

árama a leeső cseppek irányában folyt s így ennek a cseppek alakulására való zavaró hatása többé nem forgott fenn. Ezen módosítással a fejlődő elektromos mennyiség annyira csökken, hogy az addig használt fonalas elektrometerrel jól mérhető nem volt és ettől kezdve a mérések mind quadrans elektrometerrel történtek. E mérések eredményét szolgáltatja a 3. alatti táblázat. Mint később még bővebben megmutatom, az elsőrendű cseppeken kívül még másodrendű cseppek is felléptek, melyek azonban ily finom csöveknél igen könnyen reprodukálhatóak és szükségképeni következményei az elsőrendű cseppeknek.

Hogy a csepp elszakadása alkalmával esetleg még mindig fellépő apró másodrendű cseppek hatása meggátoltassék, a csőben pontosan közepébe, a cső hosszmenti tengelye irányában illesztve, előzetesen kifőzött fűszálat helyeztem el,[1] a mely a csőből 1 cm-nyi távolságban állott ki és a másodrendű cseppek nagyrészét felfogta A kisérleteket három különböző átmérőjű csővel végeztem és az összefoglaló eredményt a 4. és 5. táblázat szolgáltatja. E táblázatból világos, hogy annál nagyobb a fejlődő elektromos mennyiség, minél gyorsabban történik a folyadékcsepp elszakadása. Azonban, ha ez a sebesség egy bizonyos határt elért, akkor bármennyire fokozzuk is azt, az elektromosságfejlődés már nem lesz nagyobb. Ez látható a 4. táblázatból, a hol a félmásodperczenként elszakadó vízcsepp 50—100%-kal több elektromosságot fejleszt, mint a másodperczenként elszakadó vízcsepp. Ellenben a negyedmásodperczenként elszakadó vízcsepp által fejlesztett elektromosság a félmásodperczenként elszakadóéval szemben alig mutat valami csekély emelkedést. A csepp nagyságának befolyása is világos a táblázatból, mert a cseppek emelkedő súlya és a vele együtt nagyobbodó átmérővel az elektromos mennyiség nagyobbodása is kapcsolatos. Azonban a hatásnak és az elsőrendű cseppnek egyszerű össszefüggését megállapítanunk mindaddig nem lehet, míg a másodrendű cseppek szerepe nem eléggé ismert.

---

[1] L. LENARD: «Wied. Ann.» 1887. XXX. 209. old.

3. táblázat.

Percenként leeső csep-pek száma	A cseppek súlya	A cseppek átmérője	Levegő áram (a működő vízlég-szivattyú száma)	Fejlesztett elektromos mennyiség Coulomb pro 1 csepp
	gr	mm		
60	0,0866	5,48	0	$+0{,}212.10^{-14}$
120	0,0896	5,55	0	+0,412
240	0,0958		0	+0,624
60			1	+0,322
120			1	+1,068
240			1	+1,101
60	0,0577	4,79	0	+0,128
120	0,0599	4,85	0	+0,386
240	0,0641	4,96	0	+0,399
60			1	+0,128
120			1	+0,476
240			1	+0,942

4. táblázat.

Levegőáram nem volt. Esési magasság 21 cm. Csövek fűszállal.

Percenként leeső csep-pek száma	A cseppek súlya	A cseppek átmérője	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb
	gr-ban	mm-ben	
60	0,057	4,70	$+0{,}10.10^{-14}$
120			+0,30
240			+0,32
60	0,060	4,86	+0,15
120			+0,35
240			+0,35
60	0,083	5,42	+0,20
120			+0,40
240			+0,52

Ugyanezen kísérletcsoportból állítottam össze az 5. alatti táblázatot, a melyből az út hosszának befolyása, valamint a levegőáram hatása is kiolvasható. E kísérleteket levegőárammal,

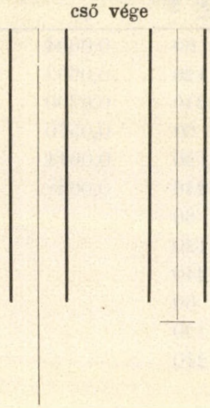
5. táblázat.

Az esési magasság változtatása. Csövek fűszállal.
A cseppek súlya 0,06 gr. A cseppek átmérője: 4,86 mm.

Percenként leeső cseppek száma	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb	Esési magasság cm-ben	Levegőáram (a működő vízlégszivattyúk száma)
60	$+0{,}12 . 10^{-14}$	21,0	0
120	+0,30		0
240	+0,32		0
60	+0,15		1
120	+0,50		1
240	+0,60		1
60	+0,30	81,0	0
120	+0,50		0
240	+0,52		0
60	+0,60		1
120	+0,90		1
240	+1,00		1
60	+0,40	131,0	0
120	+0,60		0
240	+0,56		0
60	+0,70		1
120	+1,00		1
240	+1,02		1

valamint a nélkül is végeztem s a csepp esésének útját *(DT)* is változtattam. Az út hosszának nagyobbitása egy bizonyos határig a keletkező elektromosság mennyiségét szaporította, 81 cm-nyi esési magasságnál az elektromosság jóval több volt, mint 21 cm-nyi esési magasság mellett, de az út további fokozása alig növelte azt. 131 cm-nyi magasság mellett a hatás megközelitőleg az volt, mint 81 cm-nyi út mellett. A levegőáram általában megnagyobbította a hatást; minél hosszabb úton keresztül hatott, annál nagyobb volt a hatás. A levegőáram nagyobbitása (kétszerese a táblázatban megjelöltnek) észlelhető hatással nem volt.

De mihelyt az említett útnagyobbodással megszünt a hatás nagyobbodása, akkor a levegőáram is csak eddig a bizonyos útig fokozta az elektromos mennyiséget. Figyelmet érdemel a levegőáramnak a hosszabb úton gyorsabban eső cseppekre való nagy hatása; míg a lassan eső cseppeknél a hatás alig emelkedett egynehány perczenttel, a gyorsan eső cseppeknél 50—70%-kal fokozta azt. Az utolsó jelenséget is a másodrendű cseppekkel lehet megvilágitani, miként ez a későbbiekben meg is történik.



5. ábra.

Lehetséges volt, hogy a fűszál hossza is befolyásolja a másodrendű cseppfejlődést. Ezért a fűszál hosszúságát változtattam. Az igen rövid fűszál hatása alig volt látható, az igen hosszú fűszál ellenben zavarólag hatott, mert az elsőrendű folyadékcsepp elszakadása alkalmával a fűszál rugalmasságánál fogva egy-két vízporszemet magáról elhajított.

Az elsőrendű csepp elszakadása után a fennmaradó folyadékfelület rezeg. Ennek csillapítására üvegpálczikát helyeztem a csőbe, a mely kiálló üveglapjával az elszakadás után e csillapítást végezte. Az ilyen üvegcső végét az 5. ábra mutatja.

A 6. és 7. alatti táblázat összefoglaló átnézetét nyujtja a felsorolt berendezésekkel végzett kisérleteknek. A táblázatok azt mutatják, hogy úgy a fűszál, mint az üveglemez az elektromosságfejlődést csökkentik, a miből azonban még nem lehet következtetnünk arra, hogy a fennmaradó rész rezgése is hozzájárult az elektromosság fejlődéséhez; mert hiszen a csillapitó berendezések a cseppek súlyát s így átmérőjüket is megváltoztatták, miként azt a végzett mérések is bizonyitották. Azonban az elsőrendű csepp kizárólagos hatásáról sem lehet szó, mert a vele együtt fellépő másodrendű cseppek is hozzájárulnak az elsőrendű csepp súlyváltozásához.

6. táblázat.

A cseppek átmérője 4,86 mm. Esési magasság 21 cm.

Percenként leeső cseppek száma	Az elsőrendű cseppek súlya gr	A másodrendű cseppek súlya gr	Egy csepp által fejlesztett elektromos tömeg Coulomb	Levegőáram (a működő vízlégszivattyúk száma)	A csőben
60	0,0604	0,0014	$+0{,}176 . 10^{-14}$	0	nem volt semmi
120	0,0663	0,0026	+0,301	0	
240	0,0700	0,0029	+0,352	0	
60	0,0570	0,0010	+0,100	0	üveg pálcika volt
120	0,0614	0,0014	+0,251	0	
240	0,0668	0,0016	+0,289	0	
60			+0,251	1	nem volt semmi
120			+0,502	1	
240			+0,540	1	
60			+0,151	1	üveg pálcika volt
120			+0,439	1	
240			+0,538	1	

7. táblázat.

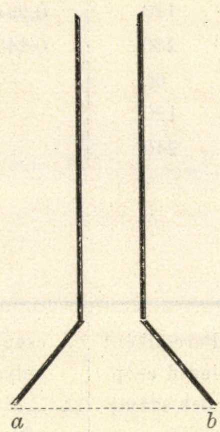
Levegőárammal. Esési magasság 21 cm.

Percenként leeső cseppek száma	Az első és másodrendű csepp együttes súlya gr	A másodrendű cseppek súlya gr	Egy csepp által fejlesztett elektromos mennyiség Coulomb	A csőben
60	0,0861	0,0082	$+0{,}301 . 10^{-14}$	semmi sem volt
120	0,0901	0,0096	+0,502	
240	0,1002	0,0100	+0,565	
60	0,0631	0,0016	+0,212	üveg pálcika volt
120	0,0655	0,0029	+0,326	
240	0,0747	0,0046	+0,539	
60			+0,067	0,9 cm hosszú fűszál volt
120			+0,404	
240			+0,360	

4. Kísérletek igen nagy cseppekkel.

Igen nagy cseppeket könnyen lehet előállítani végén tölcsér-alakú csővel, melynek alsó részét selyemfátyollal borítjuk be. A cső alakja a 6. ábrából látható. A cső *ab* átmérője 1·3 cm volt. E csővel végzett kisérletek eredményét a 8. táblázat adja. E táblázat igazolja a fejlődő elektromosságnak az előbbi kisérleteknél úgy a cseppek elszakadásának sebességétől, mint a légáramtól megállapitott függését.

E kísérleteket hasonló eredménynyel még tágabb tölcsérrel is végeztem, a melynek *ab* átmérője 2·5 cm. volt. A cseppek a cső ily nagy nyílásánál nem keletkeznek pontosan a tölcsér alsó köré-nek középpontjában. Hogy a cseppfejlődés középponti fekvését elősegitsük, a csőben üvegpálczikát helyeztem el, a melynek alsó vége a tölcsért fedő selyem fátyol középpontját némileg előretolta, ezáltal biztositván a cseppek középponti fekvését.



6. ábra.

Ugyancsak az előbb emlitett csővel is megismételtem azokat a kisérleteket, a melyek a másodrendű cseppek nagyobb vagy kisebb mértékben való kifejlődésével kapcsolatos hatásváltozást mutatták. E czélra a cső középponti tengelye mentén üvegpálczikát helyeztem el, mely a cső alsó nyílásától 1·5 cm.-nyi távolságban állott ki. Szükséges volt ily hosszú üvegpálcza használata, mert az itt fellépő másodrendű cseppek nagy száma és mennyisége különben nem maradhatott volna fenn az üvegpálczán. Ezzel az elrendezéssel végzett kisérletek eredményét a 9. táblázat tartalmazza. E táblázatból közvetlenül világos, hogy a fejlődő elektromosság mennyisége itt az üvegpálczanélküli csőben keletkezett cseppek által fejlesztett elektromosságnak alig teszi ötöd-heted részét. A másodrendű cseppek pedig rész-

8. táblázat.

Esési magasság 21 cm.

Percenként leeső cseppek száma	A cseppek súlya gr	Levegőáram (a működő vízlégszivattyú száma)	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb	Az észlelhető másodrendű cseppek száma
60	0,2067	0	$+1,226.10^{-14}$	3
120	0,2342	0	$+1,572$	6
240	0,2400	0	$+1,572$	8
60		1	$+1,414$	
120		1	$+1,890$	
240		1	$+2,006$	

9. táblázat.

Esési magasság 21 cm.

Percenként leeső cseppek száma	A cseppek súlya gr	Levegőáram (a működő vízlégszivattyú száma)	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb	Az észlelhető másodrendű cseppek száma
60	0,1591	0	$+0,245.10^{-14}$	2
120	0,1651	0	$+0,310$	3
240	0,1937	0	$+0,349$	5

ben ennek daczára még mint önálló cseppek estek le nagyobb tömegeik tehetetlensége folytán nem maradhatván az üvegpálczán, mint ez a táblázat utolsó oszlopából látható. A keletkezett elektromosság okát e jelenség alapján főleg abban a fázisban kell keresnünk, a midőn a másodrendű cseppek önálló gömbbé való fejlődése következik be. Minthogy ezen jelenségnél a másodrendű cseppek eme teljes kialakulása nem történt meg, csupán csekély mennyiségű elektromosságfejlődés volt kimutatható. A táblázatban látható súlyváltozás a különböző sebességű cseppeknél a másodrendű cseppek fennmaradásának tudandó be.

Feltűnő e kisérleteknél, hogy itt nagyobb az elektromos mennyiség kevesbbedése, mint ama cseppeknél volt, melyek vékony falú csőből folytak ki. Ezt, mint a secundär cseppeknél bővebben kifejtem, részben annak tudom be, hogy a secundär cseppek a kisebb átmérőjű cseppeknél kisebb számban lévén jelen, kisebb mértékben járultak az összes elektromossághoz. Elmaradásuk tehát nem annyira érezhető. Részben annak is betudható, hogy a keskenyebb csőben a vékony fűszál inkább engedett meg felület kisebbedést, mint a tölcsér alakú csőben elhelyezett bár vékony, de a fűszálnál jóval vastagabb üvegpálczika.

5. A folyadékcsepp alakulása és a másodrendű cseppek.

A cseppalakulás megfigyelésére, mint már említettem, a készüléken $EE'E''E'''$-vel jelzett ablakok szolgáltak.

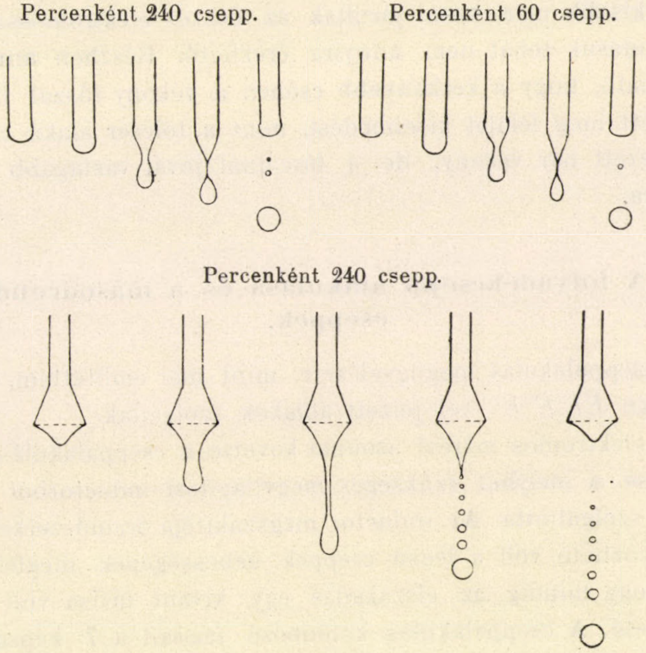
Az elektromos mérést azonnal követte a cseppalakulás megfigyelése, a melyhez szükséges megvilágítást inductorból nyert szikra szolgáltatta. Az inductor megszakítója óraműszerkezettel szabályozható volt a leeső cseppek sebességének megfelelően úgy, hogy mindig az elszakadás egy kivánt fázisa volt megfigyelhető. A cseppalakulás különböző fázisait a 7. képsorozat mutatja. Ez ábrából látható, hogy, miként LENARD[1] megmutatta, hogy a kezdetben ellypsoid alakú csepp elszakadása pillanatában hegyes végével lefelé fordított kúpfelületen függ és elszakadása után heves mozgással megy lefelé. A kúpfelület keskenyebb része felületi feszültség következtében felfelé húzódik, mely azután részben apró cseppekké szakad szét, melyek az elsőrendűt követik. Másodszor látható, hogy az apró cseppek

[1] L. LENARD: Wied. Ann. 30. k. 210—243. old. (1887.) és a füzethez csatolt fényképeket.

Ugyancsak Ph. A. GUYE ET LOUIS PERROT; «Archives des sciences physiques et naturelles». 1903 febr. füzetében 132—188. old. és ennek ábráit.

egy része összehúzódik ugyan egy közös cseppé, de azért maradnak önálló másodrendű cseppek is.[1]

Különösen tapasztalható ez, ha az elsőrendű cseppek nagyobbak és gyorsabban fejlődnek ki. Ezen megfigyelésemet



7. ábra.

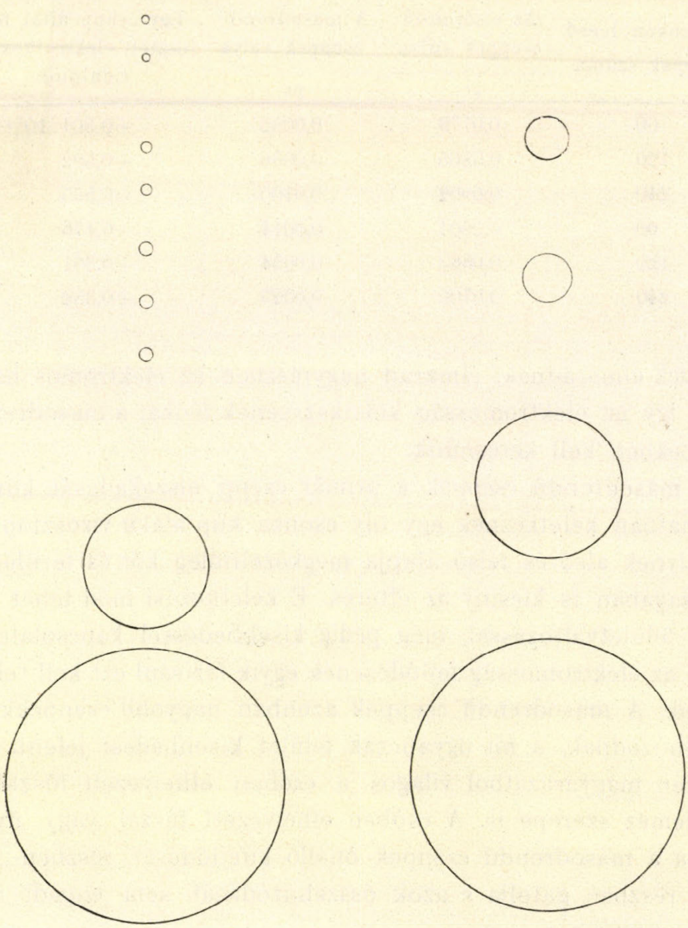
igazolták azok a kisérletek, melyeknél a leeső primär s az azt követő secundär cseppeket gyorsan mozgatott, eozin festékkel bekent barium filtrir papiroson fogtam fel, a hol a másodrendű cseppek az elsőrendűek mellett felfoghatók.[2] Ily felfogott csepp-sorozatot mutat a 8. ábra.

---

[1] Igen egyszerű módon mutathatjuk meg a legparányibb secundär cseppeket is. Ha posztó darabbal megdörzsölt pecsétviaszt a csepp elszakadási helyéhez közel tartunk, akkor a másodrendű cseppeket az elektromos erő nagy ívben kihúzza irányukból s parabola alakban ejti le.

[2] L. LENARD: «Meteorolog. Zeitschr.» 1904. év. 21. k. 249. old. és A. BECKER: «Meteorolog. Zeitschr.» 1907. év. 23. k. 247—261. old.

A következő (10.) táblázatban nehány elsőrendű és a vele kapcsolatos márodrendű csepp súlyát s az általok fejlesztett elektromos mennyiséget állítottam össze.



A cső üres volt. A csőben fűszál vagy üvegpálca volt.

8. ábra.

E kísérletek azt mutatták, hogy a secundär cseppek nagysága és száma nő a primär cseppek nagyságával. A primär és secundär cseppek számának és nagyságának nagyobbodásával nagyobbodott az elektromos hatás; ha azonban a secundär

10. táblázat.

Levegőárammal. Esési magasság 21 cm.

Percenként leeső cseppek száma	Az elsőrendű cseppek súlya gr	A másodrendű cseppek súlya gr	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb
60	0,0779	0,0082	$+0{,}301 . 10^{-14}$
120	0,0805	0,0096	+0,502
240	0,0902	0,0100	+0,565
60	0,0604	0,0014	+0,176
120	0,0663	0,0024	+0,301
240	0,0700	0,0029	+0,352

cseppek elmaradnak, elmarad nagyrészben az elektromos hatás is. S így az elektromosság keletkezésének főokát a másodrendű cseppekben kell keresnünk.

A másodrendű cseppek a primär csepp elszakadását követő pillanatban keletkeznek egy oly csonka kúp alakú vízoszlopból, a melynek alsó és felső alapja megközelítőleg kör és területeik nagyságában is kicsiny az eltérés. E keletkezési mód tehát hirtelen felületváltozással, még pedig kisebbedéssel kapcsolatos s ezért az elektromosság fejlődésének egyik fázisául ezt kell tekintenünk. A másodrendű cseppek azonban nagyobb cseppekké is összehúzódnak, a mi ugyancsak felület kisebbedést jelent.

Ezen magyarázatból világos a csőben elhelyezett fűszál és üveglemez szerepe is. A csőben elhelyezett fűszál vagy üvegpálcza a másodrendű cseppek önálló kifejlődését részben lassítja, részben gátolja s azok összehúzódását sem engedi meg teljes mértékben.

Az elsőrendű cseppeken végbemenő felületváltozás, valamint a fűszálon fenn nem maradó másodrendü cseppek javára kell írnunk azt az elektromosság fejlődést, a mely az utoljára említett tölcsér alakú csövekkel végzett kísérleteknél, az üvegszálnak a csőbe való elhelyezése után még mutatkozott.

Elsőrendű cseppeket másodrendű cseppek nélkül csak rendkívül kis átmérőjű csövekkel lehet elérni, de akkor az elektromos hatás oly kicsiny, hogy pontosan nem igen mérhető (körülbelül $0{\cdot}07.10^{-14}$ Coulomb). Hogy a másodrendű cseppek, melyek ugyancsak igen kicsinyek, mégis főokozói az elektromosság felléptének, ennek okát a másodrendű cseppek alakulásának gyorsaságában kell keresnünk.

A csepp elszakadása után fennmaradó folyadék meniskus mozgásának is kell bizonyos elektromos hatást tulajdonitanunk, a mit ama kisérletek igazoltak, melyeknél a csepegtető csőbe csillapitó üveglemezt helyeztem el. Ennek azonban a tölcsér végződésű csöveknél semmi szerepe sincsen és éppen ezért volt itt a csőbe helyezett üvegpálczikának nagyobb hatása.

A secundär cseppek szerepe részben megvilágitja azt a jelenséget is, hogy a levegő áram állandóan megnagyobbitotta az elektromos hatást.

Ugyanis ama feltevést,[1] hogy minden csepp magával viszi az elszakadásnál szabaddá lett levegőbeli elektromosság egy részét egy őt körülvevő levegőhüvelyben, a melytől csak bizonyos hosszabb út után szabadulhat meg, ki kell terjesztenünk a secundär cseppekre is s ezeknél a levegőáram hatása annál nagyobb lehet, mert a secundär cseppek sebessége jóval kisebb az elsőrendű cseppek sebességénél.

6. A cseppek súlya.

A lehulló cseppek súlyának mérése azt mutatta, hogy a cseppek sebességének változásával súlyváltozás is kapcsolatos. Gyorsabban kifejlődő cseppek súlya, ugyanazon átmérőjű csőnél állandóan nagyobb volt a lassan kifejlődő cseppek súlyánál.[2] A mérés kétféleképen történt. Először mérőedénybe fogtam fel 100 csepp elsőrendű s természetesen vele együtt a kisérő

---

[1] L. BECKER i. m. 84. oldalán.

[1] L. LOHNSTEIN: Wied. Ann. 1894. 53. k. 1062. old. GUTHRIE: Phil. Mag. (5) 1899. 48. k. 321. old.

secundär cseppeket is. Ezek súlyának századrészét tekintettem egy elsőrendű s ezt követő másodrendű cseppek súlyának. A másik mérés a már vázolt módon történt úgy, hogy a leeső cseppeket eozinnal bekent szűrőpapiron fogtam fel s a foltok nagyságából számítottam ki az első- és másodrendű cseppek súlyát. A két mérés eredménye a milligrammokban még megegyezett. Annak okát, hogy a nagyobb sebességgel elszakadó cseppek súlyát (beleszámítva a secundär cseppeket is) állandóan nagyobbnak találtam, a secundär cseppekben is kell keresnünk. A gyorsabban kifejlődő csepp ugyanis a vízfonál nagyobb részéből fejleszt secundär cseppeket s így az egy cseppel együtt elszakadó vízmennyiség nagyobb lesz mint a lassabban kifejlődő cseppeknél. Ezt bizonyítja a cseppeknek eozinnal bekent, gyorsan mozgatott papiroson való felfogása, a hol nagyobb sebességű cseppek kiséretében állandóan több secundär cseppet lehetett felfogni. Ugyanezt mutatta a kifejlődő cseppeknek szikravilágításnál megfigyelt képe. a hol ugyancsak tetemesen nagyobb számú secundär cseppet lehetett találni a gyorsan eső cseppeknél, mint a lassúbbaknál, valamint rövidebb volt a vízfonalnak a csepegtető csövön megmaradt része akkor, ha a cseppek gyorsabban estek le.

A különböző átmérőjű csepegtető csövekből nyert különböző nagyságú primär cseppeket azokkal arányosan növekedő secundär cseppek kisérték. A cseppek nagyobbodásával az elektromos mennyiség is nagyobbodott. Minthogy pedig ugyanannál a csőnél a cseppek súlya nagyobbodásának okát elsősorban a secundär cseppek nagyobb számában találtuk, ezen méréssorozat is a mellett szól, hogy az elektromosság fejlődés főoka a secundär cseppek keletkezésében van. Tekintetbe vévén azokat a kisérleteket, a melyek a secundär cseppek keletkezésének csillapítására irányultak, láthatjuk, hogy a secundär cseppeknek a fűszálon vagy üvegpálczán való fennakadása mindig a súly és az elektromos mennyiség kisebbítésével is járt. A súly kisebbedése mindig sokkal kisebb arányban történt, mint az elektromosság fejlődésének kisebbedése.

7. Az észlelt jelenség nem cseppkollektor hatás.

Kísérleteket végeztem annak kimutatására, hogy a cseppek elszakadásának pillanatában fellépő elektromosság fejlődés nincs kapcsolatban a már említett kollektor hatással. A 11. táblázat azt mutatja, hogy az *I* csőre helyezett + vagy — feszültség nem vezetett kollektor hatáshoz. Meg kell jegyeznem, hogy érintkezési potential különbség más feszültség nélkül is mindig jelen van, de ez az elszakadásnál fellépő elektromosságot egyáltalán nem befolyásolja, különben a csepegtető csőre helyezett +2 Volt és —2 Volt feszültség[1] jelenléte alkalmával, teljesen ellentett értelmű és tetemesen nagyobb hatást kellett volna kapnunk, a mit azáltal meg is mutattam, hogy ily kollektor hatást külön elő is állítottam úgy, hogy a csepegtetőedényt egyszerűen nem kapcsoltam az elektrometerre.

11. táblázat.

Percenként leeső cseppek száma	Az J csövön levő feszültség Volt	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb
60	0	$+0{,}100.10^{-14}$
120	0	+0,276
240	0	+0,314
60	+2,0	+0,113
120	+2,0	+0,314
240	+2,0	+0,314
60	—2,0	+0,076
120	—2,0	+0,148
240	—2,0	+0,202

[1] Azonban megjegyeem, hogy 5—10 Voltnál nagyobb feszültség különbség alkalmazása már zavarólag hatott, mert az elektrometer elszigetelésének pillanatában a folyadéktól már elszakadt, de még a compensatio csőben levő cseppek cseppkollektor hatást létesítettek és ezáltal a mérés pontosságát gátolták.

Ha a jelenség kollektor hatás lenne, akkor ennek okát az elszakadás pillanatában esetleg keletkező vízporszem szétszóródásában és a csepegtető csövet körülvevő rézcsőre való esésében kell keresnünk. A rézcső ugyanis nincs az elektrometerre kapcsolva; ha a rézcsövet az elektrometerre kapcsoljuk, akkor a mennyiben kollektor hatásról lenne szó, ennek teljesen el kellene maradnia. A 12. táblázat, a mely az így végzett kísérleteket tartalmazza, azt mutatja, hogy a keletkező elektromosság mennyiségét általában nem befolyásolta az, hogy a csepegtető csövet körülvevő rézcső az elektrometerre van-e kapcsolva, vagy pedig nincs.

12. táblázat.

Esési magasság 21 cm.

Percenként leeső cseppek száma	Az J cső nem volt az elektrometeren. Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb	Az J cső az elektrometeren volt. Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb
60	$+0{,}100 . 10^{-14}$	$+0{,}096 . 10^{-14}$
120	$+0{,}276$	$+0{,}263$
240	$+0{,}314$	$+0{,}309$

Megjegyzem, hogy hosszabb időn át folytatott kísérletsorozat után az *J* csövön harmatszerű lecsapódás gyakran volt található, a mi azt mutatja, hogy a lehető legfinomabb vízporszemek alakulása a cseppképződésnél alig kerülhető el, de ez igen gyenge elektromos mezők esetén mérhető kollektor hatást nem idéz elő.

8. A párolgás befolyása nem látható.

Meg akarom még említeni azokat a kísérleteket, a melyek arra irányultak, hogy a levegő nedvesség tartalma befolyásolja-e az elektromosság fejlődését. E czélra a levegő áramnak a készülékbe való belépése előtt vízfelületek felett kellett elhaladnia. A 13. táblázatban nehány mérés eredményét foglaltam össze, a mely merések ily mesterséges úton előállitott nedves levegőben s ugyancsak szobai levegőben is történtek. E táblázatból kiolvashatjuk, hogy a nedves levegő egyáltalában nem változtatja meg a kifejlődő elektromosságot, bár meg kell jegyeznem, hogy e kisérleteket csupán vastagfalú csövekkel végeztem s így nem tartom további következtetésre alkalmasaknak.

13. táblázat.

Esési magasság 105 cm.

Percenként leeső cseppek száma	Egy csepp által fejlesztett elektromosság Coulomb	A csőben volt
60	$+1{,}69.10^{-14}$	szoba levegő
120	$+2{,}60$	
60	$+1{,}83$	nedvesebb levegő
120	$+2{,}39$	

9. A vizsgálati eredmények összefoglalása.

1. Az első ízben Holmgren és később Trübi által is megfigyelt, az elszakadó folyadékcseppnél fellépő elektromosság fejlődés a lehető legtisztább körülmények felhasználása mellett is beigazolást nyert.

2. A hatás nagysága azonban lényegesen a cseppképződés módjától függ és nem határozza azt meg csupán az elszakadó elsőrendű folyadékcsepp.

3. Egy folyadékcsepp (kivévén a rendkivül kicsinyeket) elszakadása alkalmával egyes, kicsiny, másodrendű cseppek is képződnek, melyek a vízfonalnak, melyről az elsőrendű csepp elszakad, kapilláris összehúzódása következtében hirtelen keletkeznek. Ez a keletkezés igen gyors felület eltünéssel kapcsolatos. Az észlelhető elektromosság fejlődését lényegében e másodrendű cseppek keletkezése állapítja meg.

4. A keletkezett elektromos mennyiség nagysága a másodrendű cseppek számától és keletkezési sebességétől függ, ez

viszont függvénye az elsőrendű csepp nagyságának és elszakadási sebességének.

5. Ha a másodrendű cseppeket gyors kifejlődésükben meggátoljuk, akkor az elektromosság fejlődése 30—80%-kal csökken.

6. A cseppalakulásnál fellépő elektromosság teszi érthetővé a LENARD által megállapitott ama jelenséget, hogy a vízsugár által, akadályra való esése közben fejlesztett elektromosság nő, ha a vízsugár minél előbb cseppekké esik szét.

IV. A folyadék elpárolgása közben, a folyadékon keresztül hatoló gázok által fejlesztett, gázfejlődésnél fellépő elektromosság.

A következőkben felsorolom azon jelenségeket, melyeknél folyadékfelület hirtelen megváltozása lép fel s melyek eddig elektromosság fejlődés szempontjából vizsgálat tárgyát képezték.

A VOLTA-féle hypothesisnél a párolgásnál fejlődő elektromosság lenne a légkör elektromosságának oka. Ennek a vizsgálatára végzett kisérletek nagyrészt negativ eredményeket szolgáltattak, a minek okát talán abban kell kereснünk, hogy e kisérleti elrendezések [1] nagyrészt olyanok voltak, hogy mérés közben a párolgó folyadék csupán saját gőzével érintkezett s így alig lehet szó elektromos kettős réteg szétválásáról. Csupán PELLAT [2] és GALLAROTTI [3] s újabban KOLHÖRSTER [4] kisérleteztek e téren némi positiv eredménynyel.

Ha azonban meggondoljuk, hogy a természetben a párolgás állandó légáramlás mellett történik, mely a folyadéktól eltávolítja a fejlődött gőzöket, nem lehet kételkednünk abban, hogy a

[1] L. BLAKE: Wied. Ann. 1883. 19. k. 518. old. SCHWALBE: Wied. Ann. 1896. 58. k. 500. old.

[2] L. H. PELLAT: Journ. de Phys. (3) 1899. 8. k. 253. old.

[3] A. GALLAROTTI: Rend. R. Acc. dei Sinc. 1908. 17. k. 709. old.

[4] W. HOLHÖRSTER: «Über anormale elektr. Zerstreuung in Zilinder Kondensatoren bei Anwesenheit von Wasser.» Halle, 1911.

további ily irányú kísérletek határozottan positiv eredményeket fognak szolgáltatni.

Hasonlóan vizsgálat tárgyát képezte légnemű testeknek folyadékokon való keresztül haladása közben fejlődő elektromosság. Az erre vonatkozó kisérletek egyöntetűen positiv eredményt találnak. A folyadék egynemű elektromosságot nyer, míg a rajta keresztül haladó gáz másik nemű elektromossággal telik meg. Különösen beható vizsgálatokat végzett Kösters,[1] a ki különböző folyadékokat vizsgált meg. Eredményei azt mutatták, hogy a vízhez kevert sav, esetleg basis ellenkező értelemben befolyásolták az elektromosság fejlődését. Ugyancsak a különböző folyadékok különböző hatást mutattak. Broglie ezt radioaktiv jelenségnek nézi, Fischer[2] és Bloch vizsgálatai alapján azonban a jelenség más és más jelentkezését a légnemű testnek a folyadékon való áthatolása módjától, a létesült buborékok áthatolási sebességétől, a folyadék réteg vastagságától s így a végbement felületváltozásoktól kell függőnek tekintenünk.

Rokon és sok tekintetben azonos jelenség a chemiai úton előállitott gázfejlődés. Először Hankel[3] mutatta meg behatóbban, hogy chemiai gázfejlődésnél elektomosság fejlődés is végbemegy. Különböző higitott savakat csepegtetett zinkbádogba. A keletkezett elektromosság okát a fejlődött gáz által magával vitt fémrészekben kereste. Az akadályra eső folyadék által fejlesztett elektromosság ismeretével ezt a jelenséget is a folyadék felület változásának kell betudnunk, miként ezt Kösters idézett munkájában teszi s Townsend[4] az elektrolitikai gázfejlődésnél is megállapítja.

Bár quantitativ szempontból nagymérvű különbségeket találunk a két jelenségnél, mégis, ha tekintetbe veszszük, hogy a folyadékon áthatoló légnemű buborékoknak nagysága elektromos

---

[1] Kösters: «Wied. Ann.» 1899. 69. k. 12. old.
[2] R. Fischer: Wien. Bericht. 1902. 111. II. a. 1013. old.
[3] W. Hankel: Wied. Ann. 1884. 22. 387.
[4] I. S. Townsend: Phil. Mag. (5) 1898. 45. 125. old.

tekintetben szerepvivő, akkor érthetővé lesz az elektrolitikai úton létrejött gázfejlődésnél fellépő nagyobb elektromos mennyiség, hiszen annak rendkívül apró buborékai sokkal nagyobb mérvű felületváltozást s gyorsabb úton engednek meg, mihez hasonlítható a leeső cseppeket követő secundär cseppek szerepe. Az eddig felsorolt vizsgálatok érthetővé tették a folyadék felület hirtelen eltünése által az elektromos kettős réteg szétválását. A szétválás teljes mértékben való igazolását leginkább mechanikai úton létrejött felületváltozásoktól várhatjuk. Ilz vizsgálatokat végzett Holmgren már idézett munkájában, a hol sikerült nedves kendők egymáshoz való dörgölésével, illetőleg eltávolításával a kendőknek positiv töltést adni s a levegőben negativ elektromosságot kimutatni. Hasonlóképen ő hangvilla segélyével létesített s folyadékba bevezetett hullámkeltéssel is kimutatta elektromosság keletkezését, a mit ugyancsak felületváltozás folytán a kettős réteg elválasztása tesz érthetővé. Ezen vizsgálatok igazolják Lenardnak feltevését, a melylyel a tenger hullámzásánál és a csobogó patakoknál ily elektromos kettős réteg folytonos szétválását jelzi.

V. Az elektromosságot vivő részecskék.

Míg a leírt jelenség vizsgálata igen különböző alakban pontos megállapításokat nyert, a légnemű testekbe kerülő elektromosságot vivő részecskék természetének vizsgálata eddig teljesen kielégítő eredménynyel nem járt.[1]

Az elektromosságot vivők természetének kiderítése elsősorban azok terjedési sebességét mérték meg leginkább kondenzátorok és elektromos mező[2] alkalmazásával.

---

[1] A kérdést a legutóbbi időben hatalmas lépéssel vitte előre Lenard «Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger» cimű művével, melynek második része még nem jelent meg.

L. Wied. Ann. 1913. évf. 40. köt. 394—437. oldalain.

Sitzungber. der Heidelberger Akademie der Wissenschaften 1913. I.

[2] L. Kaehler: Wied. Ann. 1903. év. 12. k. 1119. old. Aselmann: Wied Ann. 1906. év. 19. k. 960. old. Becker: Wied. Ann. 1910. év. 31. köt. 98. old.

Míg KAEHLER a dest. víz által levegőben létesített elektromosság vivők sebességét egyenlőnek találja (4,17 cm. $sec.^{-1}$ pro Volt/cm.), a mely sebesség LENARD számításainak megfelelően az elektromosság vivők nagyságát a levegő molekulájának kétszeres tömegében állapítaná meg, addig ASELMANN és BECKER úgy találják, hogy az elektromosság vivők különböző sebességgel mozognak s így különböző tömegűek is, de általában sokszorta nagyobbak a levegő molekuláinál.

A molekulák anyagi szerkezetére vonatkozólag ASELMANN a konyhasóoldattal tett kísérletet. A leeső konyhasóoldat által a levegőben fejlesztett elektromosság vivők sótartalmát lángmegfestéssel kimutatnia nem sikerült, a mi még nem jelenti, hogy sótartalom nincsen benne, mert egy cm^3 ben legfeljebb 10^5—10^6 ily részecske lehet, már pedig ASELMANN szerint ehhez 16.10^{10} molekulára lenne szükség, mert $1{\cdot}5.10^{-8}$ mg. konyhasó kell legalább, hogy egy másodperczig sötét szobában a lángot megfesse.

Az elektromosságvivők anyagi minőségét tehát még további kísérletek hivatvák megvilágítani.

VI. Befejezés.

A LENARD által megállapított theoria a folyadék felület hirtelen eltünése folytán kettéváló elektromosság, a legkülönbözőbb esetekben beigazolást nyert s több jelenséget érthetővé tett. De tápot nyujtott a VOLTA által felállított légköri elektromosság keletkezésére vonatkozó hypothesisnek s annak érthető alapot kölcsönzött, ha melléje veszszük még a többi folyadék felület változási jelenséget.

LENARD eredeti értekezésében kiszámítja az eső által, mely óránként 5 mm. lecsapódást okoz, fejlesztett elektromos tömeget, melyet 2 mm. átmérőjű esőcseppeknél — $9{\cdot}6.10^{-8}$ Coulombnak talált.

Az erővonalak, melyek a levegőben levő elektromos tömeget a földfelülettel összekötik, egymással párhuzamosak, mert a fejlődő elektromosság bizonyos körig terjed és az erővonalak merőlegesek a földfelületre. Az elektromos tömeg tehát prismatikus felületen oszlik el, s az így kiszámított potential különbség $-11000 \frac{Volt}{m}$ már elegendő nagy hatás.

Az elektromosság fejlődésének itt vázolt módja, ha nem is teljesen, de tetemes részben hozzájárul a légköri elektromosság keletkezésének magyarázatához és a további e téren való vizsgálatok csak közelebb vihetnek a kérdés megoldásához, különösen pedig a légnemű testekben előforduló elektromosságot vivő részek anyagi szerkezetének felismeréséhez.

Bernolák Kálmán.

A FÖLDMÁGNESSÉGI ERŐ NAPI VÁLTOZÁSA.

Annak felismerése, hogy a földmágnességi erő napi változásának egy jelentékeny része külső hatókra vezetendő vissza, első kétségbevonhatatlan bizonyitéka volt annak, hogy a földmágnességi erő külső, nem a földben lévő hatókkal is szoros összefüggésben van. SCHUSTER ARTHUR, a ki a napi változásra e külső hatók létezését bebizonyitotta,[1] azt találta, hogy a vertikális komponensnek csupán külső hatók feltételezése mellett számitott napi amplitudója kisebb, mint a mekkorának az észlelési adatokból adódik és megvizsgálta hogy ez az amplitudó kisebbedés a Földben indukált áramokkal magyarázható-e. A vizsgálat arra az eredményre vezetett, hogy (a Földre állandó specifikus elektromos ellenállást feltételezve) az amplitudócsökkenés az elmélettől követelt fáziseltolódással nincs összhangban. De — a mint SCHUSTER megjegyzi — megegyezés jönne létre elmélet és tapasztalat között, ha a mélyebben fekvő rétegekre nagyobb vezetőképességet tételezünk fel, mint a felsőbb rétegekre tapasztalunk, úgy hogy az indikált áramok főkép a mélyebb rétegekben keletkeznének.

Az adatok elégtelen volta akkoriban részletkérdések behatóbb vizsgálatára nem nyujtottak elég biztos alapot, hisz SCHUSTER számitásait mindössze négy észlelőhely adataira alapította.

Azóta a napi variáczióra vonatkozólag dr. FRITSCHE H. új számitást végzett.[2] Jóllehet a FRITSCHE számításaiban szereplő észlelőhelyek nincsenek az egész földön arányosan elosztva, mind a mellett tekintetbe véve az észlelőhelyek nagyobb szá-

---

[1] The diurnal Variation of Terr. Magn. Phil. Trans. 1889. Vol. 180 *A* pp. 467—518.

[2] Die tägliche Periode d. erdm. Elemente St.-Petersburg 1902.

mát (27) és különösen azt, hogy az 1882—83 poláris évben a sarki állomásokon nyert észlelési adatokat is felhasználta, érdemesnek látszik ezen új számítás alapján a napi változás néhány részletét megvizsgálni.

Fritsche számításaiból kiderül, hogy a külső és belső hatók majdnem egyenrangúak. Ha a napi változás potencziáljának Fritsche-től használt alakját

$$\sum_1^\infty {}^n \sum_1^n {}^m (g_{nm} \cos mt + h_{nm} \sin mt) P_{nm},$$ [1]

hol P_{nm} csupán a sarkmagasságtól (v. pólustávolságtól) függő ismeretes függvény és g_{nm}, h_{nm} az észlelésadatokból megállapított állandók, t az éjféltől számított idő szögmértékben, a következő alakra hozzuk:

$$\sum_1^\infty {}^n \sum_1^n {}^m a_{nm} \cos(mt + \varepsilon_{nm}) P_{nm}$$ a külső hatók számára

$$\sum_1^\infty {}^n \sum_1^n {}^m A_{nm} \cos(mt + \varepsilon_{nm} + \alpha_{nm}) P_{nm}$$ a belső hatók számára,

az új állandókra a következő értékeket kapjuk: [2]

I.

	Nyári félév.				Téli félév.			
	a	ε	A	$\varepsilon+\alpha$	a	ε	A	$\varepsilon+\alpha$
(11)	2·93	183°13	5·56	260°06	6·02	23°20	2·64	293°94
(21)	14·01	226·30	5·00	181·26	12·82	211·97	5·19	185·87
(22)	1·54	60·76	1·67	88·63	1·63	223·50	0·60	216·87
(31)	3·07	202·80	4·64	83·56	4·36	325·66	4·92	50·53
(32)	6·78	35·10	2·06	6·68	5·92	21·71	3·78	23·52
(33)	0·74	284·04	0·76	292·50	0·76	48·74	0·27	87·88
(41)	13·78	94·95	12·60	277·94	8·32	100·52	11·56	282·55
(42)	1·41	355·54	1·96	157·22	1·46	156·96	3·80	207·44
(43)	3·17	214·19	0·98	207·35	3·21	210·48	1·51	229·03
(44)	0·28	145·17	0·20	185·71	0·20	26·56	0·08	339·44

[1] E kifejezés Potentiál | Földsugár.

[2] Az egyes tagokat (nm)-el jelöljük; a_{nm} és A_{nm} az amplitudok, ε_{nm} és $\varepsilon_{nm}+\alpha_{nm}$ a fázisszögek. Az amplitudok 10^{-5} *cgs* egységekben értendők.

1. Első sorban meg akarjuk vizsgálni, mely tagok azok, a melyek a két évszak közti különbséget okozzák. Ha az amplitudókat nagyságuk szerint rendezzük, a következő sorokat nyerjük:

II.

Külső hatók	Nyári félév	(21)	(41)	(32)	(43)	(31)	(11)	(22)	(42)	(33)	(44)
	Téli «	(21)	(41)	(11)	(32)	(31)	(43)	(22)	(42)	(33)	(44)
Belső hatók	Nyári «	(41)	(11)	(21)	(31)	(32)	(42)	(22)	(43)	(33)	(44)
	Téli «	(41)	(21)	(31)	(42)	(32)	(11)	(43)	(22)	(33)	(44)

Már ebből az összeállításból látható, hogy (11) tag a nyári évszakról a télire való átmenetnél kiváló szerepet játszik, a mi később még jobban kiviláglik.

Ha az egyes tagoknak a potencziál érzékéhez való számszerű hozzájárulásáról akarunk képet nyerni, nem szabad felednünk, hogy az amplitudók még P_{nm} függvényekkel szorzandók. E hozzájárulás mértékének a P_{nm} függvények[1] maximum értékének az amplitudókkal való szorzatát tekinthetjük. Ha ezt tesszük és az $a_{nm}\, P_{nm}^{\max}$ illetve $A_{nm}\, P_{nm}^{\max}$ mennyiségeket nagyságuk szerint rendezzük, nyerjük a következő sorokat:

III.

Külső hatók	Nyári félév	(21)	(11)	(32)	(41)	(22)	(43)	(31)	(33)	(44)	(42)
	Téli «	(21)	(11)	(32)	(22)	(41)	(31)	(43)	(33)	(42)	(44)
Belső hatók	Nyári «	(11)	(21)	(41)	(22)	(31)	(32)	(33)	(42)	(43)	(44)
	Téli «	(11)	(21)	(41)	(32)	(31)	(42)	(22)	(43)	(33)	(44)

A III. sorokat II-vel összehasonlítva látjuk, hogy — csak a főkülönbségre irányítva figyelmünket — úgy a külső, mint belső hatóknál (41) háttérbe lép, mig (11) előtérbe kerül. A külső hatóknál (21) a főtag, a belsőknél (11).

A következő IV. táblázat az amplitudók viszonyát és a fázi-

[1] $P_{11} = \sin u$, $P_{21} = \sin u \cos u$, $P_{22} = \sin^2 u$, $P_{31} = \sin u\, (\cos^2 u - \frac{1}{5})$, $P_{32} = \sin^2 u \cos u$, $P_{33} = \sin^3 u$, $P_{41} = \sin u\, (\cos^3 u - \frac{1}{7})$, $P_{42} = \sin^2 u\, (\cos^2 u - \frac{1}{7})$, $P_{43} = \sin^3 u \cos u$, $P_{44} = \sin^4 u$, hol u a polustávolság.

sok különbségét ($\frac{\text{tél}}{\text{nyár}}$ és tél—nyár értelemben) tartalmazza a II. összeállítás téli sora rendjében:

IV.

Külső hatók.			Belső hatók.		
	Ampl. viszony	Fázis kül.		Ampl. viszony	Fázis kül.
(21)	0·92	$-14\overset{\circ}{\cdot}33$	(41)	0·92	$4\overset{\circ}{\cdot}61$
(41)	0·60	+ 5·57	(21)	1·04	4·61
(11)	2·05	—159·93	(31)	1·06	— 33·03
(32)	0·87	— 13·39	(42)	1·94	50·22
(31)	1·42	122·86	(32)	1·84	16·84
(43)	1·01	— 3·71	(11)	0·47	33·88
(22)	1·06	162·74	(43)	1·54	21·68
(42)	1·04	161·42	(22)	0·36	128·24
(33)	1·03	124·70	(33)	0·36	155·38
(44)	0·71	—118·61	(44)	0·43	153·73

E táblázat alapján a következő következtetéseket vonhatjuk. A külső hatóknál — eltekintve a négy utolsó kicsiny tagtól — a legnagyobb változás úgy az amplitudóban, mint a fázisban a (11) és (31) tagokban mutatkozik. A III. tabella szerint (31)-nek csak kicsiny része van a potencziál számértékében, úgy hogy (11) azon tag, melyre az évszakváltozásnak legnagyobb befolyása van. Az amplitudo télen kétszer-akkora, mint nyáron és a fáziskülönbség —160°. A (21) tag, mely a II. és III. összeállításban első tag, nem változik jelentékeny mértékben a nyárról télre való átmenetnél.

A belső hatóknál ismét (11)-ben, mely a III. tabella szerint télen és nyáron a főtag, mutatkozik nagy változás, főképen az amplitudóban. A változás azonban ellenkező irányú, mint a külső hatóknál volt. Míg az utóbbiaknál kétszer-akkora az amplitudó télen, mint nyáron, a belső hatóknál félakkora télen, mint nyáron. A (42) és (32) tagoknál a változás szintén jelentékeny ugyan (különösen az amplitudóban); e tagok azonban (11)-el szemben a III. tabella szerint háttérbe lépnek. A P_{nm} maximumával szorzott amplitudók a következők:

	Nyár.	Tél.
(11)	5·56	2·64
(32)	0·79	1·44
(42)	0·35	0·69

2. Másodsorban megvizsgáljuk, hogy a Fritsche-féle új számadatok alapján mennyiben vagyunk feljogosítva arra, hogy a belső hatókat a külsőktől indukált áramoknak tekintsük. E kérdés eldöntésére a theoretikus alapot H. Lamb megadta a Schuster értekezéséhez csatolt függelékben.

Ha $\Omega_n r^n e^{i(pt+\varepsilon)}$ a külső hatóknak (melyeket elektromos áramoknak kell képzelnünk) elektromágneses potencziálja (n-ed rendű gömbfüggvény) $\Omega_{-n-1}\, r^{-(n+1)}\, e^{i(pt+\varepsilon+\alpha)}$ a tőlük a Földben indukált áramoké ($(n+1)$-ed rendű gömbfüggvény), hol Ω_n és Ω^{-n-1} csupán a polustávolság függvényei, melyek csak egy állandó (empirikusan megállapítandó) számfaktorban különböznek egymástól, úgy a Föld felületére ($r = R =$ Földsugár) a belső indukált és külső primär áramok potencziáljának viszonya:

$$\frac{\Omega_{-n-1}}{\Omega_n} e^{i\alpha} = c\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{n}{n+1}\,\frac{k^2R^2}{(2n+1)(2n+3)}\,\frac{\psi_{n+1}(kR)}{\psi_{n-1}(kR)}, \quad (1)$$

hol $k^2 = \frac{4\pi p}{\rho} i$ $(i = \sqrt{-1})$. Itt ρ a Földnek állandónak feltételezett elektromos speczifikus ellenállása; $p = \frac{2\pi m}{T}$, $T = 86400$ mp egy nap, $m = 1, 2, 3 \ldots$ a külső, primär áramok elektromágneses potencziáljának egész-, fél-, harmad- stb. napos hullámaira. Továbbá:

$$\psi_n(\zeta) = 1 + \frac{\zeta^2}{2\,.\,(2n+3)} + \frac{\zeta^4}{2\,.\,4\,.\,(2n+3)(2n+5)} + \cdots =$$
$$= 3\,.\,5 \ldots (2n+1) \left(\frac{d}{\zeta d\zeta}\right)^n \frac{\sin h\zeta}{\zeta}$$

és

$$\zeta^2 = k^2R^2 = \frac{4\pi p}{\rho} R^2 i = i\delta,\ i = \sqrt{-1}\,\cdot$$

Ha (1) egyenlet két oldalán a valós és képzetes részeket egyenlővé tesszük egymással, c-t (az amplitudók viszonya) és

α-t (a fáziskülönbség) meghatározhatjuk. H. LAMB idézett értekezésében δ kicsiny és nagy értékeire találunk az (1) egyenlet jobb oldalának kiszámítására alkalmas képleteket. Az utóbbi esetre (δ nagy értékeire) $n = 1, 3, 4$ értékek számára az idézett helyen adott módszerrel le kellett vezetnünk a számításhoz szükséges képleteket, mivel LAMB csak $n = 2$-re adja.

Ha már most bizonyos, felvett ρ értékekre a theoretikus c és α mennyiségeket megállapítjuk és ezekkel az I. táblázat alapján az észlelési adatokból adódó amplitudo viszonyokat és fáziskülönbségeket összehasonlítjuk, a következő V. táblázatot nyerjük.

V.

	$m=1$		$m=2$		$m=3$		$m=4$	
$n = 1$	c	α	c	α	c	α	c	α
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{14}$	0·0332	84°6						
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{12}$	·4044	13·0						
Adatok Nyár	1·8960	76·9						
Adatok Tél	0·4383	—89·3						
$n = 2$								
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{14}$	0·0190	87·5	0·0379	84°9				
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{12}$	·4663	21·6	·5186	15·0				
Adatok Nyár	·3569	—45·0	1·0878	27·9				
Adatok Tél	·4045	—26·1	0·3697	— 6·6				
$n = 3$								
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{14}$	0·0119	88·5	0·0238	87·0	0·0356	85°6		
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{12}$	·4516	29·9	·5265	20·9	·5625	17·0		
Adatok Nyár	1·5110	—119·2	·3043	—28·4	1·0210	8·5		
Adatok Tél	1·1290	84·9	·6393	1·8	0·3564	—39·1		
$n = 4$								
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{14}$	0·0080	89·0	0·0160	88·0	0·0242	87·1	0·0322	86°1
$\rho = 3{\cdot}70\times10^{12}$	·4119	37·8	·5057	26·7	·5516	21·7	·5803	18·7
Adatok Nyár	·9142	183·0	1·3883	161·7	·3091	— 6·8	·7173	40·5
Adatok Tél	1·3890	182·0	2·6081	50·5	·4697	18·6	·4246	— 47·1

E táblázatban ρ határaiként ugyanazon értékek szerepelnek, mint SCHUSTER-nél. A föld legfelső rétegének specifikus elektr. ellenállása 10^{14} (*E. M. cgs.*)-nek vehető[1] (a vasé 0°-nál 10^4,

[1] Met. Z. 1911 p. 259.

vörös izzásnál 10^5).[1] Közbevetőleg megjegyezzük, hogy igen kicsiny specif. ellenállásnál c az $\frac{n}{n+1}$ és a 0 felé közeledik; igen nagy spec. ellenállásnál $c = 0$, $a = 90°$.

Az V. táblázat alapján megvizsgálhatjuk, mennyiben egyezik a tapasztalat az elmélettel. Az összehasonlításnál két utat követhetünk. A tapasztalati adatokból megállapított amplitudó viszonyokra bizonyos, elfogadható bizonytalanságot feltételezve, megvizsgálhatjuk, hogy e viszonyok elméletileg mily fáziskülönbségre és speczifikus ellenállásra vezetnek és valjon e fáziskülönbségek az adatokból levezetett fáziskülönbségekkel megegyeznek-e. De másrészt kiindulhatunk a tapasztalati fáziskülönbségekből és ezekből az elmélet alapján következtethetünk a megfelelő amplitudoviszonyokra és spec. ellenállásra. Tekintetbe véve, hogy a nagyobb amplitudóval biró tagoknál — (11), (21), (31), (32), (41), (43) — a fázis télről nyárra — úgy a belső, mint a külső hatóknál (ez utóbbiaknál (11) és (31) kivételével) — nem nagyon változik, tehát a fázis meglehetősen állandó, az utóbbi eljárás megbizhatóbbnak látszik.

Az a specif. ellenállás, melyre ily módon vezettetünk, annyiban mélyebben fekvő rétegnek tulajdonitható, a mennyiben e réteg sugarának a Föld sugarához való viszonya 1-nek vehető.

Az egyes tagoknak az elméleti értékkel való részletes összehasonlítását itt mellőzzük,[2] csupán ezen összehasonlítás főbb eredményeit említjük meg, melyek a következőkben foglalhatók össze:

a) A nagy amplitudójú tagok ((21) és (41)) vagy egyáltalában nem felelnek meg az elméletnek ((41)), vagy csak alig megengedhető bizonytalanságot tételezve fel a tapasztalati adatokban ((21)).

b) A közepes nagyságú amplitudójú tagok ((11), (31), (32), (43)) közül (11) és (31) nem símulnak az elmélethez (vagy csak

[1] Smithsonian: Physical Tables 1905 p. 255.
[2] Meteor. Z. 1912 márcziusi füzet.

alig elfogadható bizonytalanság felvétele mellett), (32) különösen télen alkalmazkodik az elmélethez, (43) télen és nyáron.

c) A kicsiny amplitudójú tagok ((22), (33), (42)) közül (22) csak télen simul az elmélethez, (33) télen és nyáron, (42) azonban nem egyezik az elmélettel.

(44) tagot — kicsinysége és ezzel együtt járó bizonytalan volta miatt — nem vesszük tekintetbe.

d) A hol elmélet és tapasztalat között megegyezést lehet létrehozni, ott az adatok általában kisebb — körülb. 10^{12}—10^{13} rendű vagy még kisebb — spec. ellenállásra mutatnak, mint a mekkorát a legfelső földrétegekre feltételezhetünk (10^{14}).

3. Ha feltételezzük, hogy egy R_0 sugarú, jobban vezető magban jönnek létre az indukált áramok, úgy

$$\frac{\text{Indukált áram elektrom. potentiálja}}{\text{Primär áram elektrom. potentiálja}} = \frac{n}{n+1} \frac{k^2 R_0^2}{2n+1 \,.\, 2n+3} \frac{\psi_{n+1}(kR_0)}{\psi_{n-1}(kR_0)} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+1}$$

hol R a föld sugara.

Hogy e feltétel mellett milyen irányban módosulnak az elméleti események és mennyiben kapunk jobb megegyezést tapasztalat és elmélet között, erről a következő módon nyerhetünk tájékozást.

Legyen $\rho_1 = 3{\cdot}70 \times 10^{12}$ és ρ_0 jelölje az R_0 sugarú magnak állandónak feltételezett spec. elektromos ellenállását, továbbá legyen

$$R_0 = \lambda R \, (\lambda < 1),$$

hol

$$R = \frac{4 \times 10^9}{2\pi} \text{ cm}$$

és

$$\rho_0 = \rho_1 \varepsilon.$$

Tehát

$$\delta = \frac{4\pi p}{\rho_0} R_0^2 = \frac{4\pi}{\rho_1 \varepsilon} \cdot \frac{2m\pi}{T} (\lambda R)^2 = \frac{\lambda^2}{\varepsilon} \, 100 \text{ m.}$$

Ha ε igen kicsiny, tehát ρ_0 jelentékenyen kisebb $3{\cdot}7 \times 10^{12}$-nél és λ közel az egység, akkor δ igen nagy lesz; a theoretikus fáziskülönbségek (α) az V. táblázatban 0°-tól kevéssé különbözők és az amplitudó viszonyok megközelitőleg $c = \frac{1}{2}\lambda^3, \frac{2}{3}\lambda^5, \frac{3}{4}\lambda^7, \frac{4}{5}\lambda^9$ $n = 1, 2, 3, 4$ értékekre. Ha csak a nagyobb amplitudójú tagokat tekintjük t. i. (11), (21), (31), (32), (41), (43)-t, azt látjuk, hogy a fáziskülönbségekből kiindulva, (21)-nél úgy nyáron, mint télen a megegyezés, észlelés és elmélet között javul, (32)-nél és (43)-nál nyáron javul; (11), (31) és (41)-nél e felvétellel sem kapunk jobb megegyezést.

A λ-re tehető hypothesisek mind meglehetős bizonytalanok. Ha felvesszük, hogy $\lambda = 0{\cdot}8$, miként az abból a feltevésből adódik, hogy a belső mag felületén a külső és belső hatóktól származó vertikális erő egyenlő (és ellentett irányú)[1] és a mely érték Wiechert-nek a földrengési hullámok terjedésére vonatkozó vizsgálataival is egyezik, akkor a theoretikus amplitudó viszony általában jelentékenyen kisebbedik. Ha ε közel 1, úgy $\delta = 64, 128, 192, 256$ $m = 1, 2, 3, 4$-re és, mivel nagy δ értéknél α csak lassan változik, a theoretikus fáziskülönbségek körülbelül ugyanazok, mint az V. táblázatban $\rho = 3{\cdot}70 \times 10^{12}$ értékre, az amplitudó viszonyok azonban jelentékenyen kisebbek, a megegyezés, észlelés és elmélet között általánosságban még rosszabb lesz.

4. Az eddigi eredmények a felvetett kérdésre inkább negativ irányú választ adnak. Önként felmerül az a kérdés, nem kell-e theoretikus megfontolásainkat kibővíteni. E bővítés a következő irányban látszik szükségesnek.

Ha a Földre elektromos vezetőképességen kivül az 1-től lényegesen különböző mágneses permeabilitást is feltételezünk, akkor az indukált áramokon kivül mágnesség is indukáltatik és az eredő mágneses potencziál a vezető képesség és permeabilitás viszonya szerint más és más lesz és nagyobb permeabilitás esetén lényégesen különböző attól, melyet egységnyi permeabilitás esetében kaptunk. A Földre, mint egészre az egységtől lényegesen különböző permeabilitás felvétele eleve nem utasítható

---

[1] Schuster: The diurnal Variation of Terrestrial Magnetism. Phil. Trans. 1908 Vol. A. 208, p. 169—170.

vissza. Igaz ugyan, hogy a legfelső rétegek permeabilitása nagyon közel 1;[1] de ha azon ércztömegekre gondolunk, melyek a mélyebb rétegekben fekszenek, úgy nem látszik a priori elvetendőnek az a feltevés, hogy e rétegek nagyobb permeabilitással birnak. WIECHERT-nek a Föld belsejére feltételezett vasmagja szintén erre utal. Az az ellenvetés, hogy nagyobb mélységekben az anyagok mágnesezhetősége a növekedő temperatura miatt megszűnik (vasnál e mélység körülbelül 25 km volna), nem gyengíti a hypothesist, mert nincsen kisérletileg bebizonyítva, hogy a mágnesezhetőségnek hirtelen csökkenése, illetve megszünése egy bizonyos hőfokon túl (vasnál 770°) nem kompenzáltatik-e a növekedő nyomással,[2] annak analogiájára, a hogy például a nyomásnövekedés a forráspontot emeli. A Föld belsejére nagyobb permeabilitásnak felvétele — más kérdéssel kapcsolatban — fel is merült már az irodalomban.[3] A kérdésnek ily szempontból való tárgyalásához a theoretikus alapokat megtaláljuk H. LAMB-nak: On electrical motions in a Spherical Conductor (Phil. Trans. 1883 p. 519 etc.) cz. értekezésében. A következő tárgyalásban csak a két legnagyobb tagnak, a (21) és (41)-nek vizsgálatára szorítkozunk.

Ha μ az állandónak feltételezett átlagos permeabilitása a Földnek és ψ_n a fennebb bevezetett függvény, továbbá $k^2 = \frac{4\pi p}{\rho}\mu i$ ($i = \sqrt{-1}$ és $p = \frac{2m\pi}{T}$, $T = 86400^s$ $m = 1, 2, 3\ldots$) úgy általában áll a potencziál azon tagjára, a melyet n-ed rendű gömbfüggvény fejez ki,

$$\frac{\text{Indukált áram elektrom. potentiálja}}{\text{Primär áram elektrom. potentiálja}} = \frac{n}{n+1}\left\{1 - \frac{\mu}{\frac{\psi_{n-1}(kR)}{\psi_n(kR)} + \frac{n(\mu-1)}{2n+1}}\right\}^{4} \tag{2}$$

[1] RÜCKER: The magnetic Survey of Great Britain. Terr. Magn. Vol. I. p. 127.
[2] BAUER: Terr. Magn. Vol. XVI. p. 45.
[3] Terr. Magn. Vol. XVI. p. 45 és p. 117—119.
[4] Ez az egyenlet H. LAMB idézett értekezésének 86. és 87. egyenleteiből könnyen levezethető. H. LAMBnak X_n és X_{-n-1} függvényei helyébe a mi jelelésünkben $\frac{1}{n+1}\Omega_n$ és $-\frac{1}{n}\Omega_{-n-1}$ teendő.

A (2) egyenlet a ψ_n függvény második alakjával könnyen verifikálható

$$\left.\begin{aligned} \zeta\psi'_n(\zeta) &= -\frac{\zeta^2}{2n+3}\,\psi_{n+1}(\zeta) \\ \zeta\psi'_n(\zeta)+(2(n+1)\,\psi_n(\zeta) &= (2n+1)\,\psi_{n+1}(\zeta) \end{aligned}\right\}$$

egyenletek felhasználásával $\mu = 1$ esetében átmegy (1) egyenletbe.

Ha kR igen kicsiny, tehát ρ igen nagy, akkor, mivel ez esetben $\psi_{n-1}(kR) = \psi_n(kR) = 1$, (2) egyenlet jobb oldalából lesz:

$$-\frac{n(\mu-1)}{n\mu+n+1}.$$

Ez nem egyéb, mint egy külső mágneses mező és tőle a gömbben indukált mágnesség potencziáljainak viszonya, a mint az indukált mágnességre vonatkozó törvényekből közvetlenül levezethető.[1] ($\rho = \infty$, a gömb nem elektromos vezető.)

Tegyük

$$\zeta = kR = (i\delta)^{\frac{1}{2}} = (1+i)\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = (1+i)\,\beta.^{2}$$

Ezzel a helyettesítéssel ζ nagy értékeire $n = 2$ és $n = 4$ esetben a következő, számításra alkalmas képleteket kapjuk:

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = \frac{1}{5}\,\frac{1-\frac{1}{2\beta}+i\frac{1}{2\beta}}{\frac{1}{2\beta}-\frac{3}{4\beta^3}+i\left(-\frac{1}{2\beta}+\frac{3}{2\beta^2}-\frac{3}{4\beta^3}\right)}$$

$$\frac{\psi_1}{\psi_3} = \frac{1}{9}\,\frac{1-\frac{3}{\beta}+\frac{15}{4\beta^3}+i\left(\frac{3}{\beta}-\frac{15}{2\beta^2}+\frac{15}{4\beta^3}\right)}{\frac{1}{2\beta}-\frac{45}{4\beta^3}+\frac{105}{4\beta^4}-\frac{105}{8\beta^5}+i\left(-\frac{1}{2\beta}+\frac{5}{\beta^2}-\frac{45}{4\beta^3}+\frac{105}{8\beta^5}\right)}.$$

Az imént közölt képletek segélyével, ha $\rho = 10^{13}$ és $\mu = 10$, 100, 200, 500 vétetik, $n = 2$ és 4-re az indukált és primär

---

[1] Terr. Magnetism. Vol. XVI. decz. füzet p. 228.

[2] Phil. Trans. Vol. 180 (1889) p. 517.

áramok potencziáljának amplitudóviszonyára (c) és fáziskülönbségére (α) a következő táblázatos áttekintést nyerjük:

	μ	10	100	200	500
	δ	370	3700	7400	18500
$n=2$	c	0·3883	0·7035	0 7782	0·8526
	α	118°6	160°5	166°0	171°1
$n=4$	c	0·5525	0·8245	0·8724	0·9170
	α	146°1	169°1	172°3	175°1

E táblázatból kitűnik, hogy (41) tagra, mely V. táblázatunk alapján az elmélethez sehogysem simult, feltünő egyezést találunk különösen a nyáron az észlelt adatok (0·9142 és 183·0) és az itt nyert elméleti értékek közt, ha nagyobb mágneses permeabilitást tételezünk fel. Télen az észlelt fáziskülönbség (182·0) ismét néhány fokon belül egyezik a számított értékkel, az amplitudo viszony ugyan különböző (1·3890), de ha az adatokban némi bizonytalanságot megengedünk, szintén közel van az 1-hez.

Sajnos, hogy (21) tagra nem mondhatunk hasonlót, e tagnál nagyobb mágneses permeabilitás feltételezése sem javítja a megegyezést észlelés és elmélet között.

A (2) egyenlethez még néhány megjegyzést kivánunk tenni. Az $n=2$, 4 esetből néhány, n bármely értékre érvényes következtetést vonhatunk.

ζ igen kicsiny értékeire találtuk:

$$\frac{\Omega_{-n-1}}{\Omega_n} e^{i\alpha} = -\frac{n(\mu-1)}{n\mu+n+i}.$$

Ha μ nagy n-hez képest, e viszony egyenlő -1-el, vagyis az amplitudo viszony 1 és a fáziskülönbség 180°.

β igen nagy értékeire $n=2$ és $n=4$ esetben nyerjük, ha $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ és $\frac{\psi_3}{\psi_6}$ kifejtésében β-ra nézve első tagokig megyünk:

$$\frac{\Omega_{-3}}{\Omega_2} e^{i\alpha} = \frac{2}{3} \frac{(2\beta^2-\mu\beta-3\beta-6\mu^2+3\mu+9)+5\mu\beta i}{2\beta^2+4\mu\beta-6\beta+4\mu^2-12\mu+9}$$

$$\frac{\Omega_{-5}}{\Omega_4} e^{i\alpha} = \frac{4}{5} \frac{(2\beta^2 - \mu\beta - 20\beta - 20\mu^2 + 10\mu + 100) + 9\mu\beta i}{2\beta^2 + 8\mu\beta - 20\beta + 16\mu^2 - 80\mu + 100}$$

E képletekből, melyek β nagy értékeire érvényesek, $\mu\beta$-val való osztás után azonnal látjuk, hogy:

a) ha β μ-hoz képest igen nagy, akkor

$$\frac{\Omega_{-3}}{\Omega_2} e^{i\alpha} = \frac{2}{3} \qquad \frac{\Omega_{-5}}{\Omega_4} e^{i\alpha} = \frac{4}{5}$$

tehát a fáziskülönbség 0, az amplitudóviszonyok $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{5}$, tehát ugyanazon eredmények, mint végtelen nagy elektromos vezetőképesség és $\mu = 1$ feltétel mellett (4. l.);

b) ha β μ-hez képest igen kicsiny, akkor:

$$\frac{\Omega_{-3}}{\Omega_2} e^{i\alpha} = -1$$

és

$$\frac{\Omega_{-5}}{\Omega_4} e^{i\alpha} = -1$$

a fáziskülönbség 180°, az amplitudóviszony 1, tehát ugyanazon eredmény, mint n-hez képest nagy permeabilitás és 0 vezetőképesség esetén (8. l.).

E viszonyok tetszőleges n-re is érvényesek (l. H. LAMB i. h. p. 541.).

5. A 2—4. pontokban közöltek alapján a következő eredményhez jutunk. A FRITSCHE-féle számadatok alapján a napi variáczió belső és külső hatói között fennálló olynemű összefüggésre, a milyen primär és indukált áramok között fennáll, csak az adatokban jelentékenyebb (és némely tagnál alig megengedhető) bizonytalanság feltételezése mellett következtethetünk. Különösen fontos ez az eredmény a két legnagyobb tagnál: (21) és (41)-nél. Az utóbbinál azonban, mely semmikép sem símul az elmélethez, megegyezést lehet létrehozni elmélet és észlelés között, ha a Földre nagyobb mágneses permeabilitást tételezünk fel. A nagyobb mágneses permeabilitás és azon körülmény, hogy a mely tagoknál elmélet és ész-

lelés egyezik, ez nagyobb elektromos vezetőképességre mutat, mint a mekkora a legfelső rétegekre felvehető, arra engednek következtetni, hogy a belső hatók a föld mélyebben fekvő rétegeiben vannak, tehát ott, a hol mágnes permeabilitás és elektromos vezetőképesség — minden valószinűség szerint — nagyobbak, mint a legfelső rétegekben.

Kétségtelen, hogy újabb, a föld felületén egyenletesebben elosztott és homogen észlelési anyagra alapitott számitás megbizhatóbb eredményt fog szolgáltatni. A (41) tagra nyert eredmény arra mutat, hogy az észlelési adatoknak az elmélettel való összehasonlításánál jelentékenyebb mágneses permeabilitás lehetőségére is tekintettel kell lennünk.

Steiner Lajos.

A KÜLSŐ NYOMÁS HATÁSA A TESTEK OPTIKAI TULAJDONSÁGAIRA.

Czélszerűnek látszik mindenekelőtt azt a gondolatmenetet vázolni, a mely a szóbanforgó hatás tanulmányozására vezetett, közben — az analogiák kedvéért — néhány más jelenségre is kitérve, azután az eddigi kisérleti tapasztalatokat s elméleti értelmezésüket fogom egész röviden ismertetni, majd az absorptio nyomásoknak változására vonatkozó saját negativ eredményű kisérletemet s végül a belőle vonható elméleti következtetéseket s a további kisérletezés útját fogom jelezni.

1. Az absorptio és dispersio közti vonatkozásról. A testek dispersióját — a törésmutatónak a hullámhosszal való változását — magyarázandó, a fényelmélet feltételezi, hogy a testek atomisztikus strukturával birnak s a részecskéket (pl. elektronokat) valamiféle rugalmas erő köti egyensúlyi helyzetükhöz úgy, hogy e körül rezgéseket végezhetnek. Ha a testen fény halad át, e fényrezgések (pl. az elektromos erő) hatására a részecskék is rezgésbe jönnek és pedig annál nagyobb mértékben, minél közelebb áll az áthaladó homogén fény hullámhossza, illetve frequentiája a részecskék említett önfrequentiájához: az együttrezgő részecskék annál nagyobb mértékben befolyásolják a fény terjedési sebességét, azaz a törésmutatót. A részecskékre a quasielastikus erőn kivül még egy csillapító erő is hat, a mit vagy valami surlódásnak, vagy a szomszédos részecskékkel való összeütközésnek, vagy a mozgó részecske energiasugárzásának szokás tulajdonitani, a mi tehát a rezgés energiáját felemészti s a mi az absorptiót okozza; az absorptio annál erősebb, minél inkább közeledünk a részecskék ön-frequentiájához. A felsorolt feltevésekből a dispersió elmélete levezethető;[1] a következőkben csupán arról a legegyszerűbb esetről lesz szó, mikor a testnek egyetlenegy absorptio-vonala van. Ez esetben a törésmutatónak a frequentiával való változását — az absorptióvonaltól távoli, lényegében absorptiómentes darabon — a következő képlet állitja elő:[2]

$$n^2 = 1 + \frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2} \tag{1}$$

a hol n a ν frequentiára, azaz $\lambda = 2\pi c/\nu$ hullámhosszra vonatkozó törésmutatók, ν_0 az elektronok önrezgésének, azaz az absorptióvonalnak frequentiáját jelenti, ρ pedig a részecskék számát, tömegét, töltését tartalmazó parameter, a melylyel egyébként az absorptio erőssége arányos.

A mondottakból következik, hogy minden hatás, a mely a test törésmutatójának értékét, mondjuk a dispersio menetét megváltoztatja, egyúttal az absorptióban is változást hoz létre, például okozhatja a ν_0 megváltozását, tehát az absorptióvonal *eltolódását*. A következőkben a dispersio és absorptio közti emez összefüggés szempontjából vizsgáljuk különböző tényezők befolyását a testek optikai viselkedésére.

2. *A mágnesezés hatása a testek optikai viselkedésére.* A törésmutató változása ez esetben a FARADAY-féle, az absorptio változása a ZEEMAN-féle jelenség, a kettő közti okozati összefüggés általánosan ismeretes,[3] s itt csupán a továbbiak kedvéért ismételjük. Az utóbbi a mágneses erővonalak iránya mentén (a legegyszerűbb esetben) abban nyilvánul,

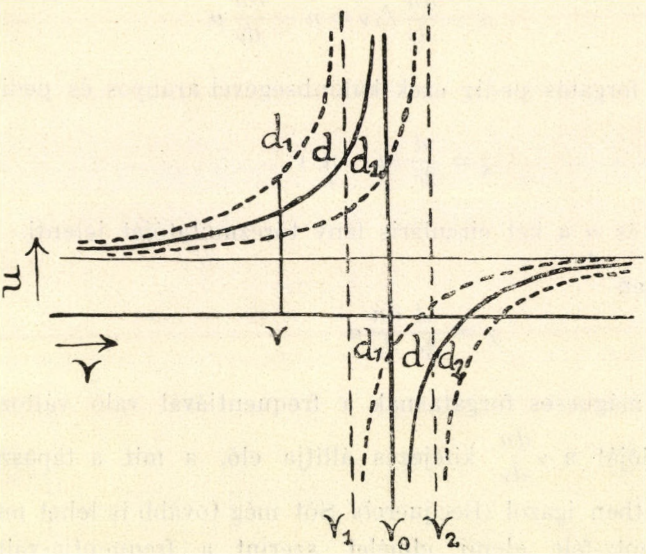
---

[1] l. pl. DRUDE, Lehrb. d. Optik, VOIGT, Magnetooptik, 103. l. KAYSER, Handb. d. Spektroskopie, a hol a különböző dispersió-elméletek bő ismertetése található.

[2] VOIGT, l. c. 109. lap.

[3] V. ö. pl. A. COTTON, Le phénomène de Zeeman; VOIGT l. c.; Math. és Phys. Lapok.

hogy az eredetileg egyetlen (ν_0) absorptióvonal kettéoszlik, a melyek egyikében (ν_1) a jobbra közösen poláros fény, a másikban (ν_2) a balra közösen polározott fény absorbeálódik. A törésmutatóban ennekfolytán előálló változást megkaphatjuk, ha az (1) képlet alapján felrajzoljuk a dispersio görbét először úgy (*d d*), hogy a $\nu = \nu_0$-nak megfelelő $n = \infty$ értéket az eredeti ν_0 helyen vegye fel, azután ugyanígy az ν_1, illetve



1. ábra.

ν_2 ordinátával, mint asymptotával (d_1 d_1 illetve d_2 d_2), szóval a felrajzolt görbét jobbra, illetve balra $\mu = \nu_2 - \nu_0 = \nu_0 - \nu_1$ darabbal eltoljuk. Látnivaló, hogy egy tetszőleges ν frequentiához két törésmutató tartozik s egyik a jobbra, másik a balra circulár-poláros fényre vonatkozik s ismeretes, hogy a két, ellentett irányban közösen poláros fény különböző terjedési sebességéből a lineár-poláros fény polárossági síkjának elfordulása, azaz a FARADAY-féle jelenség következik.

Felemlítésre érdemes, hogy ebből az egyszerű meggondolásból a FARADAY-jelenség quantitative is helyesen írható le.

Ha ugyanis a mágnesezés hatására a dispersio-görbe tényleg minden alakváltozás nélkül a frequentia-tengely mentén μ darabbal jobbra, illetve balra eltolódik, akkor az egy bizonyos ν frequentiára vonatkozó törésmutató két értéke nyilván

$$n + \frac{dn}{d\nu} \triangle \nu = n + \frac{dn}{d\nu} \mu$$

illetve

$$n - \frac{dn}{d\nu} \triangle \nu = n - \frac{dn}{d\nu} \mu$$

lesz, a forgatás pedig ezek különbségével arányos és pedig[1]

$$\chi = \frac{\nu l}{2c} (n_{-} - n_{+})$$

ahol n_{-} és n_{+} a két circuláris fény törésmutatóját jelenti. Másképen

$$\chi = \frac{\nu l}{2c} \frac{dn}{d\nu} \mu \qquad (2)$$

azaz a mágneses forgatásnak a frequentiával való változását, dispersióját a $\nu \frac{dn}{d\nu}$ kifejezés állítja elő, a mit a tapasztalat sok esetben igazol (Becquerel). Sőt még tovább is lehet menni. A Lorentz-féle elemi elmélet szerint a frequentia-változás H erősségű térben

$$\mu = \frac{e}{m} \cdot \frac{H}{2c} \qquad (3)$$

(c a fény terjedési sebessége) azaz független az eredeti frequentiától s csupán a töltés és tömeg viszonyától, az $\frac{e}{m}$ hányadostól függ. A μ emez értékét (2)-be helyettesítve, a forgatásnak sok esetben quantitative is megközelitőleg helyes képletét kapjuk (Siertsema). Szóval a törésmutató változása ebben a

---

[1] Math. és Phys. Lapok.

példában (t. i. a mágnesezés hatása folytán) tényleg teljesen az absorptio-vonal eltolódásából magyarázható.

3. *Második példa: A mozgás hatása az optikai tulajdonságokra.* A törésmutató változása ebben az esetben a FOUCAULT-FIZEAU-féle jelenség, t. i. a fény tovavitele a mozgó közeg által (l. alább); az absorptio változása pedig a DOPPLER-féle effektus. Ez utóbbin ugyan rendszerint az *emissio*-vonalnak mozgásokozta eltolódását értik, azonban a KIRCHHOFF-féle törvény szerint ugyanilyen változást szenved a mozgó közeg absorptiovonala is, nevezetesen eltolódást a színkép ibolya, illetve vörös vége felé a szerint, a mint a fény a mozgás irányában, illetve az ellenkező irányban halad át a testen. A frequentia-változás (μ) — általánosan ismeretes, elemi meggondolás szerint — az eredeti frequentiának annyiadrésze, ahányadrésze a mozgás sebessége (v) a fény sebességének, azaz

$$\frac{\mu}{\nu_0} = \frac{v}{c}\,; \quad \mu = \nu_0 \frac{v}{c}$$

A mozgásnak a törésmutatóra való hatása abban áll, hogy a mozgás irányában haladó fényre vonatkozó törésmutató kisebb, az ellenkező irányban nagyobb lesz, mint a nyugvó közegé volt. Rendesen azonban a törésmutató helyett a vele fordítottan arányos terjedési sebességről szokás szólni s ennek megnövekedését a mozgás irányában, csökkenését az ellenkező irányban úgy fejezik ki, hogy a közeg *mozgását a fénynyel közli,* a fényt magával ragadja. A fény sebességnövekedése azonban nem egyenlő a közeg v sebességével, hanem FRESNEL szerint csupán

$$\frac{n^2-1}{n^2} \cdot v$$

Ugyanerre az eredményre vezet a mozgó közegek optikájának LORENTZ-féle elmélete, illetve a relativitás elve is,[1] ha a

[1] V. ö. DRUDE, Lehrb. d. Optik, 3. kiad. 446. l.

nyugvó közegben történő fénymozgás egyenleteire a LORENTZ-EINSTEIN-féle transformatiót alkalmazzuk. Az utóbbi eljárásnál is a közeg dispersiójától eltekintenek, illetve csak utólag veszik számításba, hogy az n törésmutatót most a mozgás folytán megváltozott frequentiára kell vonatkoztatni s akkor a FRESNEL-féle coefficiens helyett

$$\frac{n^2-1}{n^2}+\frac{\nu}{n}\frac{dn}{d\nu}$$

érték adódik ki. A két tag közül az elsőnek értéke vízre s a natrium D vonalára vonatkoztatva 0,438, a másodiké 0,013, tehát majdnem elhanyagolható.

Számítsuk most ki e coefficiens értéket annak a feltevésnek alapján, hogy a törésmutató változása egyedül az absorptiovonal eltolódására vezethető vissza.[1] A terjedési sebesség az illető közegben

$$\omega=\frac{c}{n}$$

tehát előjeltől eltekintve

$$\triangle\,\omega=\frac{c}{n^2}\triangle\,n$$

továbbá ha a dispersio görbe $\triangle\,\nu_0$ darabbal eltolódik, a törésmutató változása

$$\triangle\,n=\frac{dn}{d\nu}\triangle\,\nu_0$$

és

$$\triangle\,\nu_0=\mu=\nu_0\frac{v}{c}$$

azaz

$$\triangle\,\omega=\frac{\nu_0}{n^2}\frac{dn}{d\nu}\cdot v$$

s a tovaviteli coefficiens értéke

$$\frac{\nu_0}{n^2}\frac{dn}{d\nu}$$

[1] Ilyesféle maggondolással tárgyalja KETTELER Theor. Optik. művében a fény tovavitelét.

a hol tehát ν_0 az illető anyag dispersio-formulájában szereplő absorptio-vonal frequentiája. KETTELER-nek a vízre vonatkozó formuláját felhasználva, ennek értéke *0,056*-nak adódik, tehát a valódi értéknél tetemesen kisebbnek.

Ebben a példában tehát a törésmutató változását nagyobbrészt nem az absorptio-vonal eltolódása okozza, mindamellett a kettő közti összefüggésnek itt is principiális jelentősége van. A Fresnel-féle $\frac{n^2-1}{n^2}$ coefficiensben ugyan a dispersio nem szerepel, de a valóságban nincs olyan test, a melynek az egységtől különböző törésmutatója volna s a mellett dispersióval ne bírna. A fényæther az egyetlen közeg, a melynek dispersiója nincs, s a melynek a törésmutatója 1; erre vonatkozólag a tovavitel coefficiense = 0, s valóban az a tény, hogy valamely test egyenletes translatiója a rajta végbemenő optikai jelenségeket nem befolyásolja, olyasképen is értelmezhető, hogy a testhez képest relative mozgó æther a fényt nem viszi magával. Viszont ebből következik, hogy ha a test dispergeáló közegben mozog egyenletesen, ezt a mozgást magán a testen végzett megfigyelés alapján constatálni lehet.

A továbbiakra való tekintettel még azt a megjegyzést tehetjük, hogy az absorptio-vonalnak (azaz a részecskék önrezgésének) változása ebben a példában is egész egyszerű mechanismussal magyarázható, míg a törésmutató változásának folyamatába bajos dolog mélyebben belelátni.

4. *A rugalmas alakváltozás befolyása a testek optikai tulajdonságaira.* Régóta ismeretes, hogy isotrop szilárd testek egyoldalú, rugalmas alakváltozás folytán kettősen törőkké válnak; így például az üveg egyoldalú, egyenletes nyomás hatására ugyanolyan kettős törést mutat, mint egy negatív kettősen törő kristály, a melynek tengelye a nyomás irányába esik. A törésmutató és absorptio közötti összefüggésre vonatkozó s fentebb már többször követett meggondolásból következik azonban, hogy akkor a nyomás irányában s a reá merőlegesen rezgő componens egyúttal különböző

absorptiót is szenved, szóval, hogy a *temporaer kettőstörést* mindig *temporaer dichroismusnak* kell követnie. Tényleg, temporaer dichroismust eddig is már számos esetben figyeltek meg, így[1] KUNDT[2] megnyujtott kaucsuklemezen V. SCHERR-THOSS[3] üveglemezre egyirányban felkent pépszerű anilinfestékeken, v. LASAULX[4] pedig a chlór-, jód- és brómezüst puha állományú s egyoldalúan összenyomott kristályain. Ismeretes továbbá, hogy kolloid aranynyal megfestett gelatinlemezek nyujtásra dichroitikusak lesznek s ugyancsak, hogy a gelatin a temporær kettőstörést is igen nagy mértékben mutatja. Mindezekben az esetekben a szóbanforgó test absorptiós-színképe a szokásos jellegű: elmosódottan végződő, széles sávokból áll. A fenti két példából következtethetjük azonban, hogy elméleti szempontból sokkal nagyobb érdeke és jelentősége lenne, ha a deformatio hatását lehetőleg isolált, éles és erős absorptio-vonalon figyelhetnők meg; a temporær kettőstörés elméletének kialakulása, illetve birálati ellenőrzése elsősorban ilyen megfigyelésekből remélhető.

Ilyen irányú, tudtommal egyetlen kisérletet nyilván ugyanilyen szempontból VOIGT végzett, a ki a thermikus és elastikus deformatio optikai hatását tárgyaló elméleti értekezésében[5] felemlíti, hogy didymüveg egyoldalú összenyomásánál és telitett didymsulfat-oldat egyenletes összenyomásánál (60. atmosph.) az absorptiós-színképben semmiféle változást nem tudott észlelni. Tudvalévőleg a didymüveg s a didymsulfat-oldat absorptiós színképe egyéb anyagokéhoz képest tetemesen keskenyebb csikokat tartalmaz, s éppen ezért látszottak a kisérletezésre alkalmasnak.

Ismerünk azonban szilárd anyagokat, a melyeknek színképe

---

1 WINKELMANN, Handb. d. Phys. VI. kötet, 1233. lap.
2 Pogg. Ann. *151*. 126. 1874.
3 Wied. Ann. 6. 270. 1879.
4 Fortschr. d. Phys. *372*. 570. 1881.
5 VOIGT, Beiträge zur Elektronentheorie des Lichtes, Drude Ann. *6*. 459. l. 1901.

még hasonlíthatatlanul finomabb csikokból áll; ezek t. i. elsősorban a ritka földfémeknek némely kristályai (Xenotim, Tysonit), a melyeknek absorptiós csíkjai a folyékony levegő hőmérsékletén (— 190°) finomságra a Fraunhoffer-vonalakhoz közelednek s a melyeken J. BECQUEREL[1] a szilárd testek Zeeman-jelenségét felfedezte.

Tervbe vettem ezeken az anyagokon tanulmányozni a deformatio hatását az absorptiós színképre s ámbár erre vonatkozó kisérleteimet külső okoknál fogva félbe kellett szakítanom, az eddig nyert — mint rögtön előrebocsájthatom, — negatív eredmény is bír némi érdekkel.

5. Kisérleteimet Prof. H. DU BOIS berlini magánlaboratoriumában, az ú. n. Bosscha-laboratoriumban végeztem és pedig du Bois professzor tanácsára mesterséges rubin-kristályon, a melynél alkalmasabb objektumot valóban aligha lehetne találni.

A természetes rubin anyagára nézve aluminiumoxyd, a hexaederes rendszerben kristályosodik, s szinezetét a benne feloldott chromoxydnak köszöni; a mesterséges rubin amattól semmi tekintetben nem különbözik,[2] könnyen s aránylag olcsón kapható, jól lehet csiszolni és fényezni, ámbár igen kemény, hőhatással szemben igen ellenálló s mint kisérleteim folyamán kiderült, nyomási szilárdsága is igen nagy, úgy hogy az igénybevételt több mint $100 \frac{\text{kgr}}{\text{mm}^2}$-ig lehetett fokozni. Optikai viselkedésének érdekessége tekintetében pedig teljesen egyedül áll, t. i. erős fény vagy kathódsugarak hatására igen erősen fluorescál s a *fluorescentiájának színképe ugyanazokból a finom sávokból, vonalakból áll, mint az absorptiós színképe,* holott vonalas fluorescentia-spektrumot ezelőtt csupán gőzöknél találtak. Így tehát az absorptiós színképén kívül a fluorescentiájá-

[1] Phys. Zeitschr. 8. 632., 929. l. 1907.

[2] Talán a természetes rubinkristályok nem mutatják a tengelymenti accidentális kettőstörést, a melynek zavaró hatásáról a 136. lapon van szó.

nak emissio-szinképét is kisérlet tárgyává lehetett tenni; a két szinkép megegyezéséből, továbbá abból, hogy a Zeeman-jelenséget is teljesen egyformán mutatják,[1] előre lehetett várni, hogy a nyomás hatásával szemben is egyformán fognak viselkedni.

Megfigyeléseimet a spektrumnak vörösben fekvő vonalcsoportján, illetve főkép a DU BOIS által R_2 és R_1-el jelzett két fővonalon végeztem, a melyek közönséges spektroskoppal nézve szobahőmérsékleten is éles, sötét vonalak, a használt nagy feloldó képességű rácsspektroskopban azonban természetesen sokkal szélesebbek és elmosódottak. Folyékony levegőbe mártva a vonalak *tetemesen* keskenyebbek és sötétebbek lesznek; ekkor hullámhosszuk 691,8 illetve 693,2 mμ, szélességük pedig 0,05—0,07 mμ.

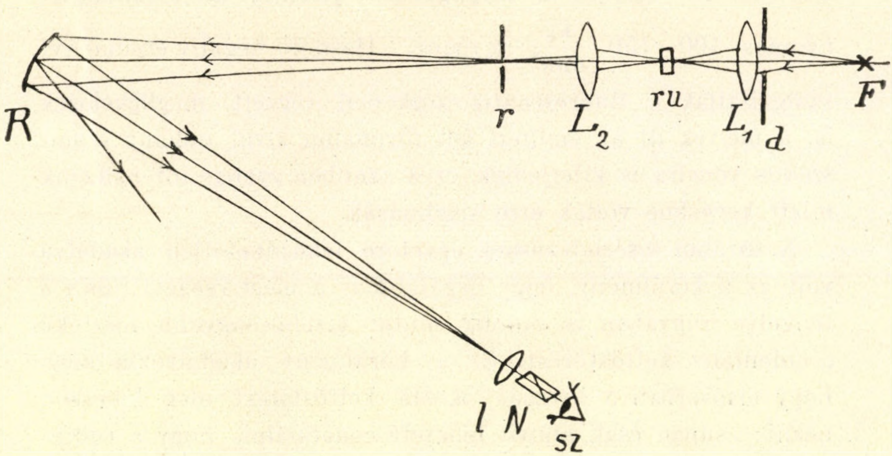
A használt kisérleti berendezés (l. a 2. ábrát) olyan volt, hogy napfény vagy elektromos ívlámpa lencsével concentrált fénye esett, a tengelyére merőlegesen metszett rubinra s azon áthaladva egy másik lencsére, a mely a rubin képét a spektroskop résére vetítette; a fluorescentia-szinkép megfigyelésekor a gerjesztő napfény természetesen oldalról esett a rubinra. A rubin kis szorító készülékbe volt két lágyvasból készült pofa közé befogva, úgy hogy egy csavar segélyével erős nyomásnak lehetett alávetni; az alacsony hőmérsékleten való megfigyeléseknél a rubin a préssel együtt Dewar-edényben lévő folyékony levegőbe merült.

Spektroskóp gyanánt 181 cm görbületi sugarú ROWLAND-féle concav-rács szolgált, a melyen milliméterenként 568, a két hüvelyk széles beosztott darabon tehát kereken 29,000 vonás volt, miután a megfigyelés az elsőrendű szinképben történt, ugyanez a szám fejezi ki a feloldó képességet is úgy, hogy elméletileg a megfigyelt vonalak hullámhosszának 1/29,000-el,

---

[1] H. DU BOIS u. G. J. ELIAS; Der Einfluss von Temperatur und Magnetisierung bei selektiven Asorptions und Fluoreszenzspektren. Ann. d. Phys. 27. 233. l. 1908. és *35*. 617. l. 1911.

azaz 0,02—0,03 $m\mu$ vel való megváltozását már észre lehetett volna venni s jóllehet a vonalak véges szélességűek. ekkora változást (a mi a vonalak szélességének felét-harmadát teszi ki) tényleg meg is lehetett volna figyelni. A concav rács tudvalevőleg közvetlenül valós színképet állit elő, ennek megfigyelésére tízszeres nagyitású lupa szolgált; az optikai berendezést kiegészítette még egy λ12-es csillámlemez, a melynek főirányai a vízszintessel $\pm 45°$-ot zártak be s a mely a valós színkép síkjába úgy volt felállítva, hogy a színkép alsó fele a lemezen



2. ábra.

keresztül, felső fele szabadon látszott s végül a szem és a lupa közé helyezett analysáló nicol. A nicol polározási síkja vízszintes volt; ez esetben tehát a színkép felső részéből a vízszintes componens, az alsó részéből pedig az eredetileg függőleges, de a csillámlemez által vízszintessé változtatott componens jutott a megfigyelő szemébe, szóval evvel a Zeemanjelenségnél szokásos berendezéssel egymásra merőlegesen polározott két színképet lehetett egyidejűleg egymásfelett megfigyelni.

6. Erre az optikai berendezésre azért volt szükség, miutan azt lehetett várni, hogy a (függőleges irányban gyakorolt)

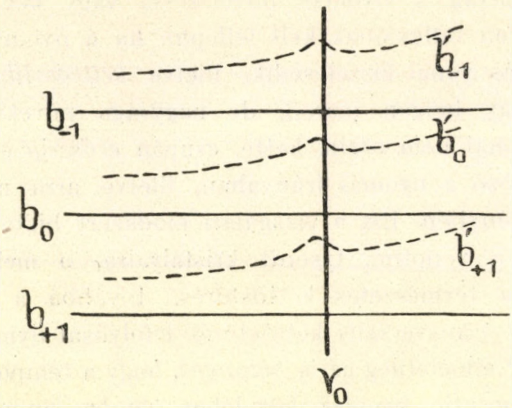
összenyomás hatására az absorptió-vonal kiszélesedik, illetve két vonalra fog oszlani, a melyek közül egyikben a vízszintesen, a másikban a függőlegesen polározott fény absorbeálódik s igy a két egymásfelett fekvő, egymásra merőlegesen polározott színképben az eredetileg egyetlen absorptióvonal megtörését ezen felső felének jobbra, alsó felének balra való eltolódását jobban lehet megfigyelni. Azonban, mint már jeleztem, a vonalakon a legkisebb ilynemű változást sem lehetett észlelni, akár szobahőmérsékleten, akár a folyékony levegő hőmérsékletén történt a megfigyelés, jóllehet az alkalmazott nyomás 100—150 $\frac{kg}{mm^2}$-ra rúgott.[1] Hasonló negatív eredményt szolgáltattak a fluorescentia-szinképen végzett megfigyelések is, a melyek itt az említett két fővonalon kívül néhány szomszédos vonalra is kiterjedtek, ezek azonban gyenge intensitásuk miatt kevésbbé voltak erre alkalmasak.

A további kisérletezésnek egyelőre leküzdhetetlen akadálya volt az a körülmény, hogy (legalább is a mesterséges) rubin a tengelye irányában is mindig mutat kisebb-nagyobb mértékű accidentalis kettőstörést. Ez a körülmény akadályozta meg, hogy elsősorban a nyomás okozta kettőstörést meg lehessen nézni; csupán csak annyit lehetett constatálni, hogy a rubinnak keresztezett nicolok között eredetileg megközelítőleg még kiolthatò képe már elég kis nyomásnál is erősen megvilágosodott s a folyékony levegőbe mártáskor észrevehetően nem változott meg. Bizonyos tehát, hogy az előidézett kettőstörés elég nagy volt, a Babinet-compensatorral megkisérlett mérések szerint 2—3 félhullámhosszra lehetett becsülni a vízszintes és függőleges fényvektor phasiskülönbségét; ugyanilyen vastag

[1] A nyomást (közelítőleg) úgy határoztam meg, hogy két 10×10 mm keresztmetszetű rézrudat egy harmadiknak közbetételével satuba befogtam s kiálló szabad végüket a szorítóval — becslés szerint ugyanakkora erőt fejtve ki — összehajlítottam; a meghajlásból, a rúd méreteiből s a hasonló módon meghatározott rugalmassági modulusból az alkalmazott erő kiszámítható.

(1·5 mm) üveglemezen szintén körülbelül egy hullámhossznyi kettőstörést lehetett előidézni.

Az utolsó kisérlet, a mivel megpróbálkoztam s a mely alkalmas lett volna valamennyi itt felvethető kérdésre egyértelmű választ adni, az volt, hogy megkiséreltem az előidézett temporær kettőstörésnek menetét az absorptio-vonalak közelében megállapitani az ú. n. horizontális interferentia-csíkok módszerével. A rubinra 45° alatt lineárisan polározott fény esett, a valódi színkép helyén (a csillámlemez helyett) Babinet-com-



3. ábra.

pensator volt felállitva, az ékek éleivel vízszintesen, a lupa és szem között ismét analysálo nicol. Az analysálót a polározóval keresztezve, a Babinet-compensator quarcz-ékein vízszintes interferentia-csíkok láthatók (b_0, b_{-1}, b_{+1} az 3. ábrán) a színképpel, tehát az ν_0 absorptió-vonallal egyidejűleg élesen. Ha valami módon, pl. kettősen törő kristálylemez közbeiktatásával a vízszintes és függőleges fényvektor-componens között phasiskülönbséget idézünk elő, a csíkrendszer eltolódik és pedig egy csikszélességgel, ha a phasiskülönbség egy hullámhossz; ha a phasiskülönbség színről-színre változik, a csíkok eltolódnak és nem is maradnak egyenesek s alakjuk közvetlenül ábrázolja a phasiskülönbségnek a színnel (hullámhosszal) való változását (l. a b'_0, b'_{-1} b'_{+1} görbéket a 3. ábrán).

Az emlitett accidentalis kettőstörés ennek a kisérletnek a kivitelét is lehetetlenné tette; a rubinon áthaladó fény u. i. oly kevéssé homogen polározási állapotú, hogy a compensator csikjai teljesen elmosódottan látszottak; a megfigyelés lehetősége tehát eleve ki volt zárva. A kisérletnek u. i. előreláthatólag azt az eredményt kellett volna szolgáltatni, hogy az accidentalis kettőstörés az absorptió-vonal közelében *anomalis* viselkedésű (miként a közönséges törésmutató is); az anomaliának a csikok felemelkedésén és behorpadásán kell jelentkezni (l. az ábrát) és pedig a nyomás növelésével vagy két, egymástól távolodó ilyen inflexiónak kell fellépni, ha a nyomás hatására az absorptiós vonal kiszélesedik, illetve *kettéoszlik*, avagy az anomalia egy helyen marad, de nagysága növekszik, ha az absorptio-vonal nem oszlik ketté, csupán *erőssége* és *szélessége* lesz különböző a nyomás irányában, illetve arra merőlegesen polározott fényben. Ezt a vizsgálati módszert biztosan lehetne alkalmazni a xenotim, tysonit kristályaira, a melyeken t. i. Becquerel a természetes kettőstörés, továbbá a mágneses-circuláris és transversalis kettőstörés lefolyását ilymódon határozta meg;[1] elméletileg az is *bizonyos*, hogy a temporær kettőstörés az absorptio vonalak közelében *tényleg* anomalis viselkedésű, az anomalia *nagyságrendjére* nézve azonban biztos következtetést vonni előre nem lehet.

7. Hátra van még, hogy megpróbáljuk negativ eredményünket elméletileg értelmezni s a temporær kettőstörés elméletére vonatkozó következtetéseket belőle levonni.

Hogy a különböző lehetőségeket sorra vegyük, először a legvalószinűbbet emlitsük fel, hogy t. i. a megvizsgált absorptio-vonalak az elastikus deformatio hatására helyzetüket egyáltalán nem, hanem csupán intensitásukat változtatják. E mellett szól az a körülmény, hogy a megvizsgált R_1 és R_2 vonal a rubinnak mind az ordinær színképében (a mit a tengelyre merőlegesen rezgő fényben figyelünk meg) mind az extraordinær

---

[1] Becquerel l. c., továbbá Voigt, Magnetooptik 227—234. l.

színképében (a mit a tengelylyel párhuzamosan történő fényrezgések szolgáltatnak) fellép, az utóbbiban azonban tetemesen kisebb intensitással. Hasonló viselkedésű vonalak találhatók a BECQUEREL-féle kristályok színképében is. Miután az egyoldaluan összenyomott isotrop test úgy viselkedik, mint valamely egytengelyű kristály, közeleső a feltevés, hogy egy olyan vonal, a melyen a test kristályos volta a két főszínképben csupán intensitáskülönbségben nyilvánul, elastikus deformatio hatására is csupán az intensitását fogja változtatni.[1]

Az elmélet szerint[2] az absorptio-vonal *erősségét* az $M=\rho/2\nu_0\nu' n_0$ mennyiség méri, ahol ρ a rezgésre képes elektronok számával arányos mennyiség, nevezetesen

$$\rho = 4\pi N \frac{e^2}{m}$$

(N az elektronok száma, e a töltése, m a tömege); ν_0 az önfrequentia, ν' a csillapodási tényező, n_0 a közepes törésmutató az absorptio-vonal helyén. Az absorptio-vonal *szélességét* ν' méri. E szerint az említett tulajdonságú vonal egy kristály színképében vagy úgy értelmezhető, hogy a tengely irányában történő, illetve rá merőleges rezgésekre különböző számú elektron képes (a mi az elektron és molekula között bajosan elképzelhető tulajdonságú merev kapcsolatokat tételez fel), vagy hogy e két irányban a csillapodási tényező értéke különböző; az elastikus deformatio pedig ezt a két mennyiséget befolyásolná.[3]

A deformált testeknek a kristályokkal való analogiáját folytatandó, meg kell azonban említenünk, hogy az említett kris-

[1] Egyelőre alig van kilátás rá, hogy eredetileg isotrop testtel lehessen kisérleteket végezni, miután isotrop testet ilyen finom absorptiós vonalakkal nem ismerünk.

[2] VOIGT, Magnetooptik 114.

[3] A csillapodási tényező változása tulajdonképen az önfrequentiát is megváltoztatja, azonban az itt szereplő kicsiny csillapodási tényező-értéknél, azaz absorptio-erősségeknél ez a változás — mint a számítás mutatja — elhanyagolható.

tályok színképében számos olyan vonal is van, a mely csak az egyik vagy másik főszínképben jelentkezik s nem látszik jogosultnak ezeket a másik színképben is igen csekély, mondjuk nulla intensitással feltételezni. Ezeket a vonalakat természetesen olyan elektronoknak kell tulajdonitani, a melyekre a tengely irányában s arra merőlegesen különböző nagyságú elastikus erő hat, e két irányban tehát különböző frequentiával rezegnek, a hogy ezt a pleochroitikus kristályok elméletében fel is veszik.[1]

Ennek megfelelően lehetnek olyan absorptiós-vonalak, a melyek az elastikus deformatio hatására tényleg ketté oszlanak, azaz a melyeknél a deformatio az elektronok önfrequentiáját befolyásolja. Ez a kiindulási pontja a temporær kettőstörés Voigt-féle elméletének. Ezt s általában a temporær kettőstörés eddigi elméleteit áttekinteni utolsó feladatunk.

8. A temporær kettőstörés első elméleti leírása E. Neumanntól származik, a ki abból a feltevésből, hogy az elastikusan deformált testben a fény terjedési sebességének megváltozása a három főirányban arányos a három fődilatatióval, a temporær kettőstörés törvényeit levezette. Természetesen ez a leíró elmélet mitsem mond a jelenség mechanismusáról; ez utóbbira is felvilágosítást csak az az elmélet adhat, a mely a ponderabilis anyagban történő fényterjedésről határozott molekularis képet alkot, azaz a mely a testek dispersio-elméletét is tartalmazza.

A temporær kettőstörés különböző elméletei e szerint elsősorban abban különbözhetnek egymástól, hogy bennük a dispersio-elméletnek milyen molekuláris kép szolgál alapul s másodszor hogy miképen értelmezik a deformatiónak az optikai tulajdonságokra való befolyását.

Az ion- vagy elektronelméleten nyugvó valamennyi elektromágneses dispersio-elmélet a testeket olyan elemi részekből rakja össze, a melyek egy nagytömegű positiv ionból s egy

---

[1] Becquerel l. c.; Voigt l. c. 235. l.

kisebb tömegű negativ elektronból állanak. Az utóbbit az előbbihez rugalmas természetű erő köti, úgy hogy egyensúlyi helyzete körül egy bizonyos frequentiával (önfrequentia) rezgéseket végezhet, ezenkívül egy csillapító erő is hat reá, a mi az absorptiót okozza. Ha a testen fényhullám halad át, a benne rezgő elektromos erő az elektront rezgésbe hozza; kisebb-nagyobb amplitudóval s kisebb-nagyobb phasiskülönbséggel a szerint, a mint a ráeső fényrezgés frequentiája az önfrequentiától jobban vagy kevésbbé különbözik s ezekből a törésmutatónak és absorptiónak a frequentiával való változása egyszerű módon kiadódik; az absorptió-vonal az önfrequentia helyén lép fel. A Helmholtz—Reiff-Drude-féle[1] dispersio-elméletet az a feltevés jellemzi, hogy az elektront gerjesztő elektromos erőt *azonosítja* avval az erővel, a mely ugyanazon a helyen a vakuumban fellépne, a többi molekula (ion és elektron) hatásától tehát eltekint, a mi elsősorban gázok, például nátrium-gőz dispersiójának leirásánál látszik jogosultnak.

A temporær kettőstörésnek Voigt-tól[2] származó elmélete ehhez az egyszerűbb dispersioelmélethez csatlakozik. Egész általánosságban feltételezi, hogy a rugalmas deformatio mind a quasielastikus erőt, a mely az elektronra hat, mind a csillapító erőt megváltoztatja; a változást a három főirányban a három fődilatatióval s a térfogati dilatatióval arányosnak tételezi fel, úgy hogy az elektron a három főirányban három *különböző* önfrequentiával és csillapitással rezeg. Voigt elméletére tehát az a felfogás jellemző, hogy az elastikus deformatiónak oly befolyást tulajdonit, a mely egészen a molekula belsejéig hat, úgy, hogy a deformált testben maguk a *molekulák is megszűnnek isotropok lenni.* Hogy ez a változás miként gondolandó, arról az elmélet természetesen semmiféle felvilágositást nem nyújt s e tekintetben további spekulációknak nem ad irányitást.

---

1 Drude, Lehrb. d. Optik. 3. kiad. 363—369. l.
2 Voigt, Ann. d. Phys. 6. 459. 1901.

A fentvázolt dispersio-elmélettől egy további lépés vezet azokhoz a dispersio-elméletekhez (Helmholtz, Lorentz, Planck), a melyek egy-egy elektron mozgásának leírásánál tekintetbe veszik a többi molekula hatását is. Megint avval az egyszerű feltevéssel élünk, hogy a positiv ionok mozdulatlanul maradnak s csak a negativ elektronok jönnek rezgésbe. Miután a molekulák távolsága egymástól kicsiny a fény hullámhosszához képest, egy hullámhossznyi darabon igen sok molekula fekszik, tehát a szomszédos negativ elektronok elongatiója igen közel egyenlő úgy, hogy *relativ* helyzetük igen kevéssé változik, mialatt egy fényhullám vonul át rajtuk s rezgésbe jönnek. Nyugalmi állapotukban azonban egyenletesen vannak elosztva, tehát az egy-egy negativ elektronra a többi által gyakorolt eredő erő nulla s a fentiek szerint rezgés közben is nulla marad. Hasonlóképen a positiv ionoktól származó erők eredője is nulla a symmetria-viszonyoknál fogva, a míg az elektron egyensúlyi helyzetében van; ha azonban onnan kimozdul, az elmozdulás irányában eső ionokhoz közelebb áll, mint a szemben fekvőkhöz, a miből egy, az elmozdulás irányában ható és kis elmozdulás esetén, avval arányosan eredő erő származik. A szomszédos molekulák hatása tehát abban nyilvánul, hogy az elektronra ható quasielastikus erőt látszólag kisebbíti.

Közelfekvő gondolat, hogy erre a dispersio-elméletre is lehet a temporær kettőstörés elméletét alapítani. Gondoljuk, hogy az eredetileg isotrop testet például az OZ tengely mentén egyenletes nyomásnak vetjük alá úgy, hogy ebben az irányban összenyomódik, a rá merőleges irányokban kitágul. Ezáltal a test megszűnt isotrop lenni, ha a molekulák (positiv ion s a quasielastikus erővel hozzákötött elektron) isotropok is maradtak. Minden számítás nélkül is világos ugyanis, hogy az ilymódon deformált testben az OZ tengely mentén elmozduló elektronra a positiv ionok nagyobb erőt gyakorolnak, mintha az elektron a reá merőleges irányokban végez ugyanakkora elmozdulást úgy, hogy a nyomás irányában s a reá merőleges irányokban ilymódon is az elektron számára két különböző önfrequentia, a test számára két különböző törésmutató adódik.

Ennek a felfogásnak jellemzője, hogy a test anisotropiáját nem a legkisebb részecskék anisotropiájával, hanem az isotrop részecskék anisotrop elrendezéséből magyarázza.

Ennek a felfogásnak szigorú mathematikai tárgyalását adja P. P. Ewald,[1] az elektromágneses elméletből levezetvén egy olyan legegyszerűbb kristálymodell optikai tulajdonságait, a mely egy derékszögű térbeli hálózatból áll, a melynek metszéspontjai az x, y és z tengelyek mentén három különböző (a, b és c) távolságban vannak egymástól s minden metszéspontban egy ionból s elektronból álló atom van elhelyezve. Az elméletnek egyik nevezetes folyománya, hogy ha n_1, n_2, n_3 a három főtörésmutató, akkor

$$\frac{1}{n_1^2-1}-\frac{1}{n_2^2-1}=D_{12}$$

független a hullámhossztól, az elektronok számától és minőségétől s csupán a strukturától, az a, b, c oldalhosszak viszonyától függ. Ezt a vonatkozást már előbb felállította s néhány kristályon igazoltnak is találta T. Havelock.[2] Magának a D mennyiségeknek kiszámitására Ewald igen komplikált szerkezetű végtelen sort vezet le; az egyetlen végigszámolt esetben[3] a talált D értékek 3...-szor kisebbek a törésmutatóból számítottaknál. Természetesen nem is várható, hogy ilyen egyszerű kép quantitative is helyes eredményt szolgáltasson s be kell érnünk a nagyságrendbeli egyezéssel.

Hogy a temporær kettőstörés magyarázatára alkalmas-e ez az elmélet, egyelőre még függőben kell hagynunk. Mindenesetre tudunk mondani olyan esetet, a mikor nagy valószinűség sze-

---

[1] Dispersion und Doppelbrechung von Elektronengittern (Kristallen). Diss. München. (Göttingen, 1912.)

[2] Proc. Roy. Soc. London. LXXX. 28. l. 1907.

[3] $Ca\,SO_4$, a melynek hasadási viszonyai ilyen egyszerű strukturára engednek következtetni $a:b:c=0{,}8932:1:1{,}0008$ viszonynyal.

rint ilyen structuralis kettőstöréssel van dolgunk, t. i. a kocsonyás anyagok kettőstörése esetén. Ismeretes dolog, hogy pl. a gelatin-kocsonya deformálva igen nagy mértékű kettőstörést mutat akkor is, ha csak 10—20% gelatint tartalmaz. A deformáláshoz szükséges erő ekkor olyan csekély, hogy a molekuláknak deformálását a Voigt-féle értelemben lehetetlen felteteleznünk, ellenben a structurabeli változás annál inkább valószinű, miután a gelatin-kocsonya eredetileg is ultramikroskópos structurával bír (Bütschli). Megint más kérdés, hogy a felvett structura tulajdonságai ilyen elektron hálózattal visszaadhatók-e vagy pedig inkább azokkal a vizsgálatokkal hozhatók vonatkozásba, a melyeket Wiener végzett a lemezesen vagy oszloposan rétegzett közegek kettőstörésére vonatkozólag. Végül — hogy minden eshetőséget felemlítsünk — egyáltalán nincs kizárva, hogy valamely szilárd test, például üveg deformatiójánál megint egészen más folyamatok játszódnak le.

Selényi Pál.

MEGNYÚLNAK-E A JELEK VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ TELEGRAFALÁSKOR IS?

1853-ban merült fel először az eszme, hogy Európát Amerikával transatlanti kábel segélyével kössék össze. BABINET, a párisi műegyetem egyik legkiválóbb tanára abban az időben következőképen nyilatkozott:

«Nem tudom ezt a tervet komolyan venni, mert az elektromos áram elmélete ellenmondhatatlanul bebizonyítja ennek az összeköttetésnek lehetetlen voltát, még ha el is tekintünk azoktól a kóbor zavaró áramoktól, a melyek ezen a vezetéken fellépnek. Ezek a zavaró áramok már a Dover—Calais vonalon is jelentkeznek, ámbár ez a szakasz elég kicsi. Az egyedüli módszer az újvilágot az óvilággal összekötni, csak a Behring tengerszoros áthidalása volna.»

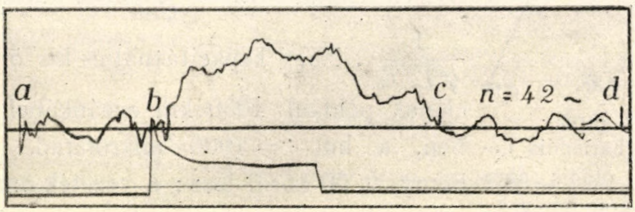
A bécsi elektrotechnikai egyesület folyóiratában az «Elektrotechnik und Maschinenbau» 1909. évi 37-ik füzetében első ízben bizonyítottam be számpéldákkal, hogy a kábeleken át gyorstelegrafálás lehetséges.

Számításaimat különböző oldalról megtámadták és az eredmény az lett, hogy az újabban fektetett kábelek például Németország—Délamerika, Angolország—Északamerikai Egyesült Államok régi minták szerint készíttettek és így gyorstelegrafálásra nem használhatók, ennek folytán a régebbi drága kábeltarifa, a mely magánember részére a sürgönyzést úgyszólván lehetetlenné teszi, továbbra is fenmaradt.

Fentebb említett aritmetikai számításaim ellen az volt a legfőbb ellenvetés, hogy a jelek bizonyos sebességen túl összefolynak. A hyperbolikus függvények, a melyeket számításaimban alkalmaztam, természetesen nem jelzik ezt a jelenséget. A hyperbolikus függvények alapján a kábelvezeték egyes állandóiból, az ellenállásból, levezetésből, az önindukcióból és a kapacitásból kiszámítható a kábel összellenállása. Ismerve a kábel elején alkalmazható feszültséget és a kábel összellenállását, kiszámíthatom a végponton megérkező áramot és ha ismerem az alkalmazandó vevőkészülékek érzékenységét, azonnal megmondhatom, hogy bizonyos gyorsaság mellett valamely kábel használható-e még, vagy sem. Kisérleteimben sohasem észleltem, hogy a váltakozó áramnál a megérkező jel hosszabb lett volna, mint a kiinduló. A jelek összefolyásának az oka tehát okvetlenül az egyenáramban volna keresendő, annál is inkább, mivel a kábelszakértők az egyes jelmeghosszabbodásról és így a jelcsoportok összefolyásáról, mint közönséges tényről beszélnek és így jelösszefolyásnak tényleg mégis kell léteznie. A hyperbolikus függvények szerint hogyha az egyes állandók rossz értékekkel birnak, például $c = 23 . 10^{-8}$ farad kapacitás, $l = 10^{-4}$ henry önindukció, $g = 10^{-6}$ $1/ohm$ elektromos vezetőképesség, $r = 0{\cdot}9$ *ohm* ellenállás kilométerenként, 4000 kilométer kábelhossznál és $w = 2\pi\ n = 120$, a hol n a frekvencia, a kábel összellenállása körülbelül 140.000,000 *ohm* és így ez a kábel $w = 120$ sebességnél a követelményeknek már nem felel meg, mivel a megérkező áram oly kicsi, hogy nem vehető észre; a sürgönyözés tehát lehetetlen, mert a vevőállomáson a készülékek nem hozhatók működésbe, azonban a jelek meghosszabbodását a számítási mód egyáltalán nem jelzi.

Egész véletlenségből sikerült a jelmeghosszabbodást az egyenáramnál tanulmány tárgyává tennem. Azokat a lehetőségeket tanulmányoztam, a melyeket az erős áramú mikrofonok nyujtanak, hogyha a telegrafvezetékeket telefonálásra használjuk fel. Megvizsgáltam azokat a zörejeket, a melyek a telegrafvezetékeken jelen vannak és figyelemmel kisértem a kiinduló és megérkező egyenáramú telegrafjelek lefolyását. Csak mellesleg jegyzem meg, hogy az európai államokban a telegrafvezetékeken jelentkező zörejek frekvenciája majdnem megegyezik az emberi beszéd frekvenciájával és így a telegráfvonalon való telefonálás egész más módon oldandó meg, mint azt eddig van RYSSELBERGHE és követői tették.

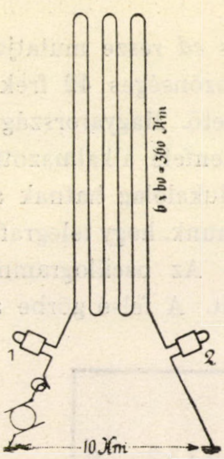
Az 1. számú ábrában a felső görbe *ab* és *cd* része mutatja ezeket a telegrafzörejeket. Mint látjuk, a közönséges 42 frekvenciás váltakozó áram alapja egész jól kivehető. Magyarországban találták fel a transformatort és a mindenfelé alkalmazott világítási és erőátviteli váltakozó áramok indukálólag hatnak a telegrafvezetékekre és így nem kell csodálkoznunk, hogy telegrafvezetékeinken annyi váltakozó áram folyik. Az oscillogramm alsó görbéje mutatja a kimenő áram alakját. A felső görbe a



1. ábra. Egyenáramú jel meghosszabbodása 360 kilométer hosszú vashuzalos, földvisszavezetésű telegráfvezetéken.

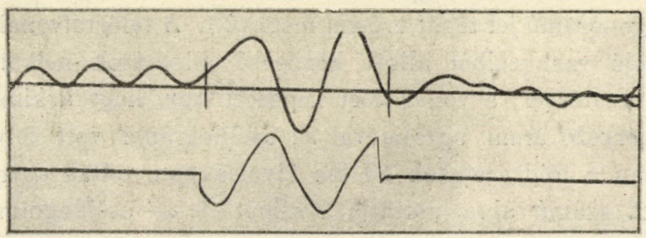
megérkező áram alakját *bc* részben tünteti fel. Mint látjuk a megérkező áram mintegy 160%-kal hosszabb, mint a kiinduló. Az egyenáramú jel tehát erősen megnyúlt. A telegrafvonal 5 mm átmérőjű vashuzalból állott közbeeső állomások nélkül, földvisszavezetéssel; a vonal kört képezett úgy, hogy a kimenő és a megérkező áram ugyanavval az oscillograffal volt felvehető, azonban a földvezetékek 10 km távolságban voltak egymástól.

A 2. számú ábra mutatja a sémát. 1. az oscillogram tükre a kimenő áram, 2. az oscillogram tükre a megérkező áram részere. A jel kommutator segélyével adatott úgy, hogy az oscillografmotor egy fordulatára egy jel bocsáttatott ki a vonalra. A mint a kimenő áram görbéje feltünteti, a töltő áram első csúcsa elég erős, úgyszólván kétszeresen nagyobb, mint az alsóbb stationär áram, a mely a megtöltés után folyik a vezetékbe. Mint látjuk, a vezeték erősen megtöltődik. Mi történik azonban, hogyha egy vezetéket megtöltünk és azután a töltőfeszültséget a vezetéktől elveszszük? A vezeték kisül és pedig a saját rezgésszámával. Ez az önrezgésszám egyszerű vezetékeknél például, ha $r=0$ és $g=0$ könnyen kiszámitható.[1]



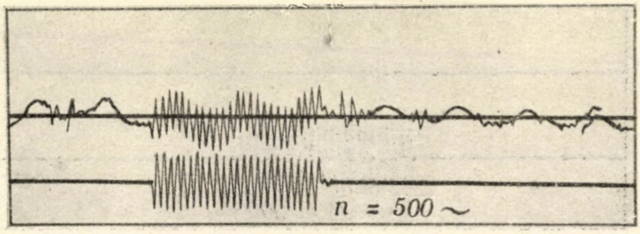
2. ábra.
Az első, harmadik, negyedik, ötödik ábra oscillogrammjainak felvételekor használt kapcsolás sémája.

A vezetékben lévő mágneses és elektromos energiák a legkisebb ellenállású utat keresik ki maguknak; a vezeték önrezgése az a $w = 2\pi n$ frekvencia lesz, a melynél az összes reaktanc $Lw - \frac{1}{Cw} = 0$, azaz $w = \frac{1}{\sqrt{L. C}}$. Nagy kapacitásnál és kis önindukciónál, például 4000 km oceánkábel esetében, a hol $c = 1000$ mikrofarad, $l = 0{\cdot}4$ henry, w 50 körül lesz; a vezeték önrezgése tehát körülbelül akkora, mint az a sebesség, a melylyel a ma használatos kábeltelegráfia dolgozik. Természetesen az ellenállás és a levezetés is szerepet játszanak s az eredményt módositják. Kimondhatjuk azonban, hogy egyenáramú telegrafálás esetében csupán a vezetékek önrezgésszámával dolgozunk. Kérdés, miként alakulnak a viszonyok, hogyha a vezetékre egyenáram helyett váltakozó áramot kényszerítünk rá?



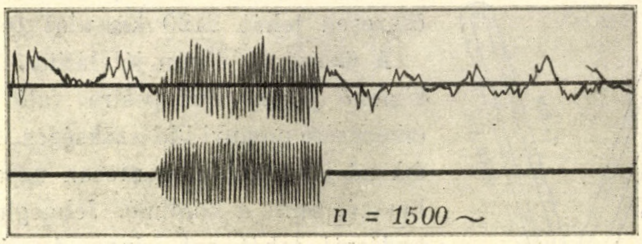
3. ábra. Közönséges frekvenciájú váltakozó áramú jel oscillogrammja. Jelmegnyúlás nincs.

A 3. számú ábra a váltakozó áramú jelnek az oscillogrammját tünteti föl. A vezeték kapcsolása ugyanaz volt, mint a 2. számú ábrában. Látjuk, hogy már 42 periodus esetében nincsen jelmeghosszabbodás. Az oscillograf hurokja a felvétel-



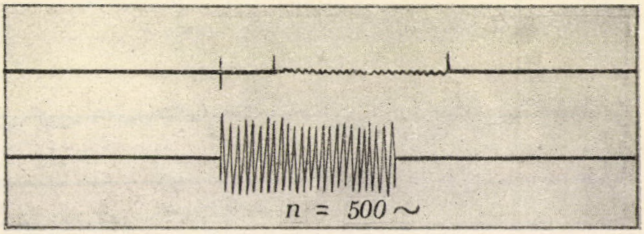
4. ábra. 500 frekvenciás áram jelének oscillogrammja 360 kilométer vashuzalos, földvisszatérős telegráfvezetéken. Jelmegnyúlás nincs.

nél HAUSRATH-féle betéttel volt kicserélve. Ez a betét igen érzékeny; 10^{-7} amperig mér, azonban önrezgésszáma igen kicsiny, a miért is a zavaró áramok közül csak a legalacsonyabb frekvenciákat látjuk, a magasabb frekvencziával birókat a betét már nem jelzi.



5. ábra. 1500 frekvenciás áram jelének oscillogramja 360 kilométer vashuzalos, földvisszatérős telegráfvezetéken. Jelmegnyúlás nincs.

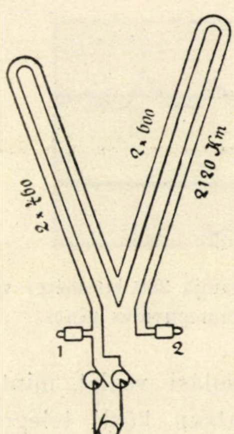
A 4. számú ábrában ugyanaz a kapcsolási vázlat, mint a 2. számú ábrában, azaz a Budapest—Hatvan közti telegrafvezeték hatszorosan van véve, összesen tehát 360 km légvezeték van bekapcsolva, a melyhez még a budapesti városivezeték kábele is csatlakozik. A 4. számú ábra a kiinduló és megérkező áramot tünteti fel, hogyha 500 periodusú váltakozó áramot alkalmazunk. Az 5. számú ábra ugyanolyan kapcsolás, mint a 2. számú ábra mutatja, azaz 360 km telegrafvezeték, a frekvencia azonban 1500. Jelmeghosszabbodást egyik esetben sem látunk.



6. ábra. 500 frekvenciás áram jelének oscillogrammja 2120 kilométer kettős vezetékű, bronzhuzalos áramkörön. Jelmegnyúlás nincs.

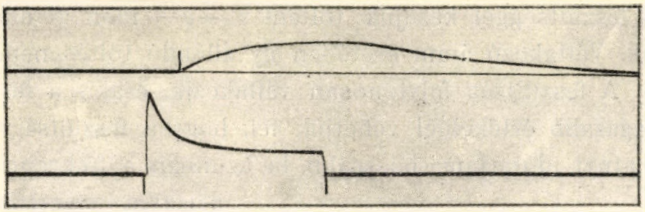
A 6. számú ábra az 500 frekvenciás jel oscillogrammját tünteti fel. Ebben az esetben a kapcsolás a 7. számú rajz szerint történik. Az áram kiindul Budapestről, elment Gyulafehérvárra, visszajött Budapestre, összekapcsoltatott a fiumei ággal, kiment Fiuméba, visszajött Budapestre, összesen tehát 2120 km utat tett meg.

A 6. számú ábrán jól látjuk, hogy a kimenő jelnek Budapestre való visszaérkezésére mennyi idő szükséges. A megérkező jel azonban pontosan ugyanolyan hosszú, mint a kiinduló. Jelmeghosszabbodásról tehát szó sincs. Az áramkör egyes adatai a következők: $w = 10000$, $r = 2{\cdot}8$ *ohm*, $l = 1{\cdot}43 \; 10^{-3}$ henry $c = 12.10^{-9}$ farad, $g = 10^{-6}$ 1/*ohm*, a kimenő áram kezdeti ellenállása $Z_0 = 348{\cdot}46$ $(-5° \; 17{\cdot}85')$; a csillapítás értéke $= 41 \cdot 82 . 10^{-3}$ $(84°, -13{\cdot}09') = (42{\cdot}13 + j\,416{\cdot}07) \; 10^{-4}$; a német irodalomban szokásos βL körülbelül **8·8.**



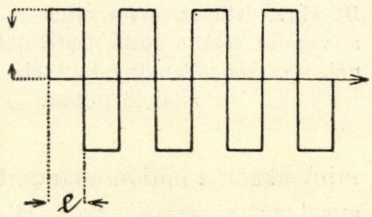
7. ábra. A hatodik és nyolcadik ábra oscillogrammjának fölvételekor használt kapcsolás sémája.

KARL WILLY WAGNER[1] az $X = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{c}{l}} \times$ vonalhossz kitejezést redukált kábelhossznak nevezi. Ez a WAGNER-féle *kábelhossz* e kisérlet esetében 8·57, ezt a hosszt WAGNER még nem mondja nagynak, ő csak 10—40-ig terjedőleg beszél hosszú kábelekről.



8. ábra. Egyenáramú jel oscillogrammja 2120 kilométer, kettős vezetékű, bronzhuzalos áramkörön. A jelmegnyúlás nagyobb 300 %-nál.

Ezen a vezetéken is felvettem az egyenáramú jelet, az eredményt a 8-ik ábra mutatja. Szemmel látható tehát, hogy míg egyenáram esetében a jelmeghosszabbodás több száz százalékot tesz ki, addig váltakozó áram használatakor meghosszabbodás nem mutatkozik. A jelmeghosszabbodás elméletét WAGNER dolgozta ki[2] s matematikai levezetései ellen egyenáram esetében nem is tudok kifogást emelni. A váltakozó áramra WAGNER a következő megfontolások alapján tér át.



9. ábra. A váltakozó áram alakja a K. W. WAGNER elméleti levezetésében.

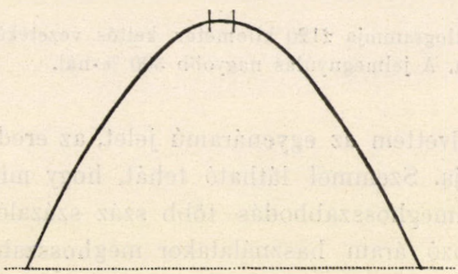
A váltakozó áram alakja helyett a 9. ábrában feltüntetett képzelt feszültségi görbét alkalmazza és ezen görbe alkalmazásánál azt mondja, hogy a szinusz vonal helyett ily alaknak alkal-

[1] Mitteilungen aus dem Telegraphen Versuchsamt des Reichspostamts. Die Aussichten der Telephonie und Schnelltelegraphie durch Oceankabel.

[2] K. W. WAGNER, i. h. Seite 105 bis 115.

mazása csak lényegtelen különbséget rejt magában, az összes számításokat azonban ez az alak jelentékenyen megegyszerűsíti.

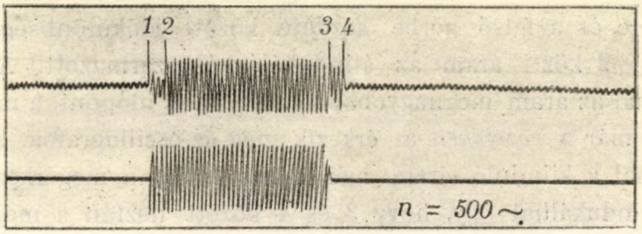
Mint fentebb kimutattam, a megtöltött vezetéket a töltés után magára hagyva, e vezeték a saját frekvenciájával eszközli a kisülést. Mit jelent azonban a 9. számú ábrában feltűntetett görbe? Azt, hogy a vezetéket pillanatnyi idő lefolyása után teljes feszültséggel kezdjük tölteni s —*e*— időn át állandóan töltjük. Váltakozó áram esetében ily állandó töltés nem lehetséges. A feszültség folytonosan váltakozik, csakis a feszültség legmagasabb értékeinél vehetjük fel, hogy a feszültségváltozás pillanatnyi időtartama hosszabb, azonban a frekvenciát elég magasra veszszük, még ez a végtelen kis idő is, a mely alatt a vezeték valamely kis töltést felvehetne, majdnem zérusra csökken.



10. ábra. Szinuszvonalú váltakozó áramnál a vezeték csak a görbe legfelsőbb értékénél, s csakis pillanatnyi kis ideig vehet fel állandó töltést.

Megérthetjük ebből a fejtegetésből, hogy váltakozó áramok különösen magasabb frekvenciájú jelek adásakor egészen más formulákat és levezetéseket kell alkalmaznnnk, mint akkor, a midőn állandó töltésről beszélhetünk. Nem akarom evvel azt mondani, hogy Wagner levezetései értéktelenek, véleményem az, hogy a német birodalmi posta kisérleti állomásának elmélete egyenáramú jelekre nagyon jól alkalmazható, váltakozó áramú jelekre azonban hamis eredményt ad. Így tehát semmi ok sincs arra, hogy a Wagner-féle levezetések alapján a jövőben is épúgy tartózkodjunk a magasabb önindukcióval biró kábelek lefektetésétől, mint az például a Németország—Délamerika közti kábelnél is történt.

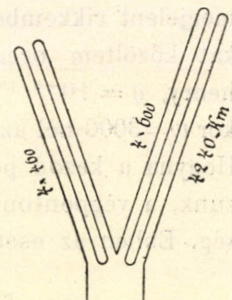
Hogy magasabb önindukciójú kábelek esetében mily gyorsaságot érhetünk el, azt természetesen legegyszerűbben magán a kábelen próbálhatjuk meg. Minthogy azonban a régebbi kábeleknek önindukciója 10^{-4} henry, azaz 100-szor kisebb, mint



11. ábra. 500 frekvenciás áram jelének oscillogrammja 4240 kilométer egyes vezetékű, bronzhuzalos telefonvezetéken. A jelmegnyúlás csak látszólagos (az indukció-hatás következtében). Tényleges jelmegnyulás nincs.

a milyennek a gyorstelegrafálás céljaira lennie kellene, a kisérletet a meglévő kábelen nem végezhetjük el. Új kábel fektetése milliókba kerülne és így a meggyőző kisérletet csakis légvezetékeknél eszközölhetjük. Kisérletnél csupán csak a kábel összellenállása jön szóba. Hogyha valamely légvezetéken, a melynek összellenállása, vagy a mint azt újabban divatosan nevezik, »*kábelhossza*», βL-je (β csillapitási tényező kilométerenkint, L hossz kilométerben) ugyanaz, mint a kábelnél és ha ezen a légvezetéken jelmegnyúlást nem tapasztalunk, teljes biztos sággal kimondhatjuk, hogy a kábelen sem lesz jelmegnyúlás és így megfelelőleg szerkesztett kábelen a gyorstelegrafálás lehetséges lesz.

A 11. sz. ábra mutatja a megérkező jelet 4240 km-es légvezeték esetében.



12. ábra. A tizenegyedik ábra oscillogrammjának fölvételekor használt kapcsolás sémája.

A 12. ábra a kapcsolási vázlatot tünteti fel. A vázlatból látjuk, hogy egyes vezetékeket alkalmazunk, a melyek közt tehát az átindukálás lehetséges. Az oscillogrammot nézve, az első pillanatra tényleg úgy látszik, mintha a jel csakugyan meghosszabbodott volna, ez azonban csak látszat. A kiinduló áram a beérkező ágra indukcziót fejt ki és ez az indukczióáram jelentkezik az 1. és 2. közötti görberészen. A kiinduló áram kezdete és a felső görbe kezdete között időkülönbség nincs. (Az 1—2 közti áram az átindukálásból származott.) A 2. sz. pontnál az áram megnagyobbodik. Ez az az időpont, a mikor az áram már a *vezetéken* át érkezik meg az oscillografba. A 3. sz, pontnál a kiinduló áram már zérus és igy a megérkező ágra nem indukálhat úgy, hogy 3 és 4 között tisztán a megérkező áram van feltüntetve.

A megérkező jel nagysága tehát csupán csak 2 és 4 között foglal helyet és pontosan ugyanaz, mint a kiinduló áram. Jelmegnyúlás nincs, az 1—2 között csak az átindukált áram működött.

Az Elektrotechnik und Maschinenbau-ban az 1909-ik évben megjelent cikkemben a 3. sz. táblázatban a következő adatokat közöltem oceankábelre. Ha $c = 23 . 10^{-8}$ farad; $l = 10^{-2}$ henry, $g = 10^{-6}$ $^1/ohm$, $r = 0{\cdot}9$ *ohm*, $L = 4000$ kilométer, akkor $w = 3000$-nél az összellenállás 595.602, kereken 600.000 *ohm*. Hogyha a kezdő ponton 120 voltos feszültségforrást alkalmazunk, a végponton 120 : 600,000 = 0·2 milliamper az áramerősség. Ebben az esetben $\beta = 21{\cdot}620 . 10^{-4} + j\, 1438{.}5 . 10^{-4}$

$$X = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{c}{l}} \times 4000 = \mathbf{8{\cdot}63}\,;\ L\beta = \mathbf{8{\cdot}65}.$$

Mint látjuk egy ily oceankábelnél csak **8·65**-t kaptunk, míg a 7. sz. ábrában feltüntetett oscillogrammban $\beta L = \mathbf{8{\cdot}8}$ volt. Az első pillanatra azt a tüneményt, hogy az egyes vezetékű kábelen a csillapitás kisebb és így az összellenállás is kisebb, mint kettős vezetéknél, meglepőnek tarthatjuk, tulajdonképen azonban nincs min csodálkoznunk. Kettős vezetéknél 1 km hurokellenállása kétszerese az 1 km huzalénak; kapacitása nagyobb, önindukciója kisebb, végeredményben csillapitási értéke nagyobb és összellenállása is nagyobb lesz.

Nagyon valószinűnek tartjuk, hogy ily hosszú kábeleken egyes vezetékkel és nagy önindukcióval a telefonálás is lehetséges és így csaknem semmi akadálya sincs annak, hogy az újabban fektetendő kábelek, mint például Angolország—Island — Kanada; Ausztrália—New—Sealand és a mi viszonyainkra térve, Triest—Alexandria közti kábel nagy önindukcióval szerkesztessenek és így gyorstelegrafálásra is alkalmazhatók legyenek. A gyorstelegrafálás természetesen az árak tetemes leszállításával járhat. Az önindukció akár KRARUP-féle vasspirálisos alakban, akár PUPIN csévékben is behelyezhető a kábelbe. Telefonálásra való alkalmazáskor természetesen a zavaró áramok lecsökkentésével a megérkező beszédáramok egy része is elvész, minthogy azonban például a Triest—Alexandria kábel összellenállása csak mintegy félmillió ohm, erős áramú mikrofonnál pedig majdnem 10.000,000 ohmmal biró ellenálláson át is lehet beszélni, a megérkező áram a beszélgetésre még elég nagy marad.

Összefoglalva: váltakozó áramú jelek a vezetéken nem hosszabbodnak meg. Meghosszabbodás csakis egyenáramnál észlelhető. Nagy önindukcióval biró oceánkábelen gyors-telegrafálás és e mellett egyes vezetékű földvisszatérős telefonálás is lehetséges.

Gáti Béla.

Kimutatás

az 1912. évi január hó 1-től deczember hó 31-ig befolyt díjakról.

Alapító tagsági díjat fizettek: Báró Eötvös Loránd 500 kor., Terlanday Emil 120 kor.

Rendes tagsági díjat fizettek:

1907. évre: Kuthy József 6 kor.

1908. évre: Antal Márkus 10 kor., Bóbita Endre 4 kor., Cholnoky Jenő 2 kor., Czuczy Emil 6 kor., Ellend József 6 kor., Fejes Zsigmond 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Hogyor József 6 kor., Homor Ernő 6 kor., Képessy Imre 10 kor., Kuthy József 6 kor., Ratkovszki Pál 6 kor., Szabó Gábor 10 kor., Tass Antal 6 kor., Zemplén Győző 10 kor.

1909. évre: Balog Mór 10 kor., Barabás Jenő 6 kor., Cholnoky Jenő 6 kor., Czuczy Emil 6 kor., Dörnyei Károly 6 kor., Elekes Pál 6 kor., Fabinyi Rezső 6 kor., Fejes Zsigmond 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Hogyor József 6 kor, Homor Ernő 4 kor., Jancsó Béla 6 kor., Kerekes Dezső 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Ráth Arnold 10 kor., Ratkovszki Pál 6 kor., Scholtz Ágost 6 kor., Szabó Gábor 10 kor., Szontágh Gusztáv 6 kor., Tass Antal 6 kor., Zemplén Győző 10 kor.

1910. évre: Andor Tivadar 10 kor., Barabás Jenő 6 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Cholnoky Jenő 2 kor., Czekelius Aurél 10 kor., Dózsa János 6 kor., Elekes Pál 6 kor., Emszt Kálmán 10 kor., Fabinyi Rezső 6 kor., Habán Mihály 10 kor., Hogyor József 6 kor., Juckel Gyula 10 kor., Kerekes Dezső 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Purpringer István 6 kor., Ratkovszki Pál 6 kor., Scholtz Ágost 6 kor., Simon Ferencz 6 kor., Steiner Miklós 6 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Szabó József 6 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zemplén Győző 10 kor.

1911. évre: Ábrahám István 10 kor., Andor Tivadar 10 kor., Baló Gyula 6 kor., Barabás Jenő 6 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Benda Jenő 10 kor., Bielek Miksa 10 kor., Borossay Dávid 6 kor., Bozzay Zoltán 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Csemez József 10 kor., Czekelius Aurél 10 kor., Deutsch Lajos 10 kor., Dombay Nárczisz 6 kor., Dózsa János 6 kor., Emszt Kálmán 10 kor., Fabinyi Rezső 6 kor., Fehér Sándor 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Gáti Béla 10 kor., Habán Mihály 10 kor., Hang Dániel 6 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Kelemen Ignácz 10 kor., Kiss Gábor 10 kor., Konkoly-Thege Miklós 10 kor., Kovács I. Kandid 6 kor., Kőnig Dénes 10 kor., Lakits Ferencz 10 kor., Lengyel Imre 6 kor., Nagy Dezső 10 kor., Obláth Richárd 10 kor., Pécsi Albert 10 kor., Pék János 6 kor., Pekár Dezső 10 kor., Polczer Kálmán 10 kor., Prokesch Ignácz 6 kor., Ratkovszki Pál 6 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Salamon Ernő 6 kor., Scholtz Ágost 6 kor., Simon Ferencz 6 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Straub Sándor 10 kor., Strausz Ármin 10 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szabó József 6 kor., Szabó Péter 10 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Tolnai Jenő 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Visnya Aladár 10 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Walek Károly 6 kor., Wartha Vincze 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zemplén Győző 10 kor., Zilahi ref. főgimnázium 6 kor.

1912. évre: Ábrahám István 10 kor., Baló Gyula 6 kor., Bálint Elemér 10 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bielek Miksa 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bodócs István 6 kor., Borossay Dávid 6 kor., Bozzay Zoltán 6 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Csopey László 10 kor., Czekelius Aurél 10 kor., Csikszeredai róm. kath. főgimnázium 6 kor., Demeter István 6 kor., Deutsch Lajos 10 kor., Domonkos Kálmán 6 kor., Dózsa János 6 kor., Éber József 10 kor., Eltscher Simon 6 kor., Emszt Kálmán 10 kor., Egri áll. főreáliskola 6 kor., Fabinyi Rezső 6 kor., Fehér Sándor 6 kor., Félegyházi Antal 6 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 kor., Gáti Béla 10 kor., Geőcze Zsárd 10 kor., Goldziher Károly 10 kor., Grosschmid Lajos 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Hang Dániel 6 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Hasenauer Andor 6 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Hajdunánási ref. főgimnázium 6 kor., Jakucs István 6 kor., Jánosi Imre 10 kor., Javorik János 6 kor., Jordán Károly 10 kor., Kelemen Ignácz 10 kor., Kherndl Antal 10 kor., Kiss Gábor 10 kor., Klatt Román 6 kor., Konkoly-Thege Miklós 10 kor., Kopp Lajos 10 kor., Korda Dezső 6 kor., Koren Dénes 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kovács I. Kandid 6 kor., Kőnig Dénes 10 kor., Kövesligethy Radó 10 kor., Kronberger Ede 10 kor., Kecskeméti ref. főgimnázium 6 kor., Lakits Ferencz 10 kor., Leber Gyula 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lévay Ede 10 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Marczell György 10 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Miller Gyula 6 kor., Müller József 10 kor., Nagy Dezső 10 kor., Nagy József 6 kor., szőkefalvi Nagy Gyula 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Nyáry Béla 6 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pap János 6 kor., Pécsi Albert 10 kor., Pék János 6 kor., Pekár Dezső 10 kor., Petry Gyula 6 kor., Pogány Béla 10 kor., Pólya György 10 kor., Prokesch Ignácz 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Ratkovszki Pál 6 kor., Rátz László 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Rucsinszki Lajos 10 kor., Sárközy Pál 6 kor., Scholtz Ágost 6 kor., Simon Ferencz 6 kor., Simon Tádé 6 kor., Straub L. Gyula 6 kor., Sraub Sándor 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 6 kor., Szabó József 6 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Székely Károly 6 kor., Szekeres Kálmán 10 kor., Széky István 6 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., Szászvárosi ref. Kún-kollegium 6 kor., Szarvasi ev. tanítóképző 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Tresztyánszky Sándor 6 kor., Ujj Gyula 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vajnóczky István 10 kor., Vámos Dezső 10 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Walther Béla 6 kor., Wartha Vincze 10 kor., Weber Márton 6 kor., Wodetzky József 10 kor., Zemplén Győző 10 kor.

1913. évre: Bodócs István 4 kor., Czekelius Aurél 10 kor., Király Henrik 6 kor., Kirchknopf András 6 kor., Mattyasóvszky Kasszián 6 kor., Pap János 4 kor., Pécsi Gusztáv 4 kor., Petry Gyula 6 kor., Riegl Sándor S. J. 6 kor., Rucsinszki Lajos 10 kor., Szőke Béla 10 kor.

1914. évre: Pécsi Gusztáv 2 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1909. évre: Aradi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Budapesti tanárképzőintézet gyakorló főgimnázium 10 kor., Budapesti áll. fels. leányiskola és leánygimnázium 10 kor.

1910. évre: Aradi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Budapesti tanárképzőint. gyakorló főgimnázium 10 kor., Budapesti áll. fels. leányiskola és leánygimnázium 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 4 kor., Zsolnai áll. főreáliskola 10 kor.

1911. évre: Aradi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 8 kor., Budapesti tanárképzőintézet gyakorló főgimnázium 10 kor., Budapesti II. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti áll. fels. leányiskola és leánygimnázium 10 kor., Békéscsabai ev. ref. Rudolf-főgimnázium 10 kor., Budapesti VI. k. áll. tanítónőképzőintézet 10 kor., Budapesti X. ker. (tisztviselőtelepi) áll. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári kegyesr. Kalazantinum 10 kor., Kisujszállási ref. főgimnázium 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 10 kor., Szamosujvári állami főgimnázium 10 kor., Szekszárdi állami főgimnázium 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgimnázium 10 kor., Székelyudvarhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Zsolnai áll. főreáliskola 10 kor.

1912. évre: Aradi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Bártfai áll. főgimnázium 10 kor., Békéscsabai áll. fels. leányiskola 10 kor., Beregszászi áll. főgimnázium 10 kor., Brádi áll. polg. fiuiskola 10 kor., Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti IV. ker. közs. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti IV. ker., közs. főreáliskola 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti áll. fels. leányiskola és leánygimnázium 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti VII. ker. közs. polgári fiuiskola 10 kor., Budapesti tanárképző-intézeti gyakorló főgimnázium 10 kor., Budapesti VIII. ker. (Tavaszm.-u.) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti IX. ker. (Mester-u.) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Eőtvös kollégium 10 kor., Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Budapesti cziszt. r. tanárképzőintézet 10 kor., Budapesti magy. kir. tud. egyetem könyvtára 10 kor., Czeglédi áll. főgimnázium 10 kor., Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Debreczeni ref. főgimnázium fizikai szertára 10 kor., Döme Károly 10 kor., Erzsébetvárosi áll. főgimnázium 10 kor., Eperjesi ev. főgimnázium mathematikai és fizikai szemináriuma 3·75 kor., Érsekujvári közs. kath. főgimnázium 10 kor., Fogarasi áll. főgimnázium 10 kor., Győri áll. főreáliskola 10 kor., Gyulai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgimnázium 10 kor., Hepke Bertalan 10 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 10 kor., Karczagi ref. főgimnázium 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kolozsvári egyet. ábrázoló mértani intézet 10 kor., Kolozsvári kegyesrendi Kalazantinum 10 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Kolozsvári áll. polg. fiuiskola 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 10 kor.. Makói áll. főgimnázium 10 kor., Malackai ferencrendi zárdafőnökség 10 kor., Marosvásárhelyi áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Marosvásárhelyi r. k. főgimnázium 10 kor., Mezőberényi polgári iskola 10 kor., Maksai Gyula 10 kor., Nagyenyedi Bethlen-főiskola könyvtára 10 kor., Nagyszebeni áll. főgimnázium 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Pécsi fels. keresk. iskolai könyvtár 6 kor., Podolini kegyesr. főgimnázium 10 kor., Pozsonyi kir kath. főgimnázium 10 kor., Privigyei kegyesr. főgimnázium 10 kor., Peskó Ödön 3·75 kor., Sepsiszentgyörgyi ref. főgimnázium 10 kor., Soproni ág. h. ev. lyceum 10 kor., Szakolczai kir. kath. főgimnázium 10 kor., Szamosujvári áll. főgimnázium 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgimnázium 10 kor., Szatmárnémeti polg. isk. tanítónőképző 10 kor., Székelyudvarhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári áll. fels. leányiskola 10 kor., Ungvári kir. kath. főgimnázium 10 kor., Ungvári áll. főreáliskola 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgimnázium 10 kor., Weidinger N. utóda 24 kor.

1913. évre : Budapesti tanárképzőintézeti gyakorló főgimnázium 10 kor., Eperjesi ev. főgimn. mathematikai és fizikai szemináriuma 6·25 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Peskó Ödön 6·25 kor.

Budapesten, 1912. évi deczember hó 31-én.

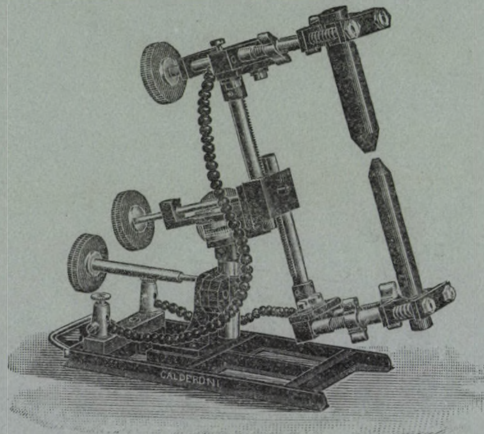
Dr. Privorszky Alajos
pénztáros.

Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Elektromos ívlámpa legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Elektromos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	**45.**—	**65.**	**90.**—	**145.**—	**200.**—	**240.**— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

Franklin-Társulat nyomdája

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

HUSZONKETTEDIK ÉVFOLYAM

IV—V. FÜZET 1913 ÁPRILIS—MÁJUS.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1913.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszonegyedik társulati év 1912 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, sziveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* egyet. magántanár (VII., Ilka-u. 32.) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivőtitkár czimére **VIII., Múzeum-körút 6.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.,** a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czime alatt. A reclamatiók, czimváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesitjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres boritékkal adjuk; nyomtatott boritékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámitásával adhatunk.

☛ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT VÁLASZTMÁNYA mély fájdalommal tudatja, hogy

Dr. KŐNIG GYULA

nyug. műegyetemi ny. r. tanár, volt rektor, cz. miniszteri tanácsos, a Magy. Tudományos Akadémia igazgatóságának tagja és a Mathematikai és Természettudományi osztályának titkára, a «Pro literis et artibus» jelvény tulajdonosa stb., Társulatunknak alapítása óta alelnöke, 1913. évi április hó 9-én, életének 64. évében, váratlanul elhunyt.

A nagy veszteség, mely hazánk tudományos életét a mathematikai tudományok e kimagasló művelőjének halálával érte, pótolhatatlan. De különösen érzékeny vesztesége és gyásza van Társulatunknak, melynek munkásságát kiváló tehetségével, nagy tudásával, széles látókörével teljes odaadással irányította.

Sikerekkel gazdag tudományos munkásságának emlékét kegyelettel fogja megőrizni Társulatunk.

A VÁLÓSZINŰSÉGSZÁMÍTÁS NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL ÉS BIZONYOS VELÖK ÖSSZEFÜGGŐ HATÁROZOTT INTEGRÁLOKRÓL.

(Második közlemény.)

VI.

Áttérünk az előbbi pont formulájának speciális eseteire; ezekre nézve v. ö:

Bierens de Haan: Tables d'intégrales définies 1858.

Table 195. No. 1—7, 15*, 16*, 17*.
Table 197. No. 6, 7, 13, 17*, 20*.
Table 198. No. 1—13.
Table 199. No. 1, 2**, 3.
Table 202. No. 5, 6, 7**, 8, 9**, 16†, 17†, 18†, 30, 39**.

Bierens de Haan: Nouvelles tables d'intégrales définies. 1867.

Table 151. No. 1, 8, 9, 30, 31.
Table 153. No. 1, 2**, 3, 4, 5, 27, 28, 29**, 30**.
Table 156. No. 1, 7, 11, 13.
Table 157. No. 1, 5, 6, 13, 15, 17, 19, 20, 23, 25†, 27, 28.
Table 159. No. 12, 13, 14, 15, 16**, 17†, 20, 28**.

A megjegyzés nélkül adott formulák az előbbi pont eredményéből levezetve helyesnek bizonyultak.

A *-gal jelölt formulák íráshibái a korrekcziókban javítva vannak, vagy némely az első kiadásban előfordulók a második kiadásban.

A **-gal jelölt formulákban vagy a feltételekben, a melyek közt megállanak, íráshiba vagy hasonló rendű hiba van; így p. o. Table 202. No. 7, 9, 39 és Nouv. Tables. Table 159. No. 16, 28 csak az írásmódban különbözőleg, hiba nélkül megvannak az utóljára említett tábla 15. formulájában.

A †-tel jelzettek végül lényegesen hibásak.

Mindezen formulák és még jó egynéhány könnyen megtalálhatók az előbbi pont formulájából levezetve, ha a geometriai jelentést szem előtt tartjuk.

1. Ámbár nem bizonyítottuk be, szintén formulánk speciális esetét képezi az egyenlőség:

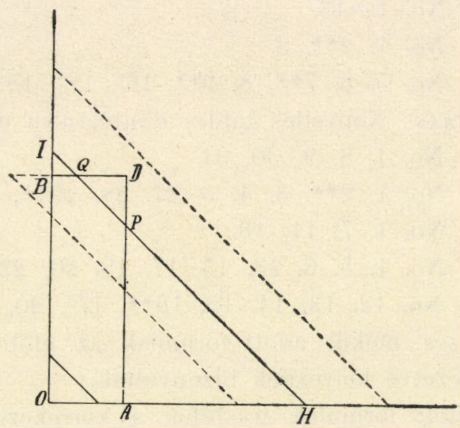
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \operatorname{sgn} a.$$

2. Két argumentum esete. Legyenek a, b pozitivok, $a \geqq b$, akkor

$$\frac{2^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \frac{(a+b)-(a-b)}{1\,!} = 2b.$$

Általában, mint közismert[1]

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b \cdot \operatorname{minor}\,(|a|,\ |b|).$$



3. ábra.

3. Három argumentum esete. Formulánk, a mennyiben egy terület mértékszámát fejezi ki, elemi geometriai úton verifikálható. Legyenek a, b, c pozitivok (l. 3. ábra)

$$O = (-a,\ -b),$$
$$A = (a,\ -b),\quad B\,(-a,\ b),$$
$$D = (a,\ b).$$

[1] P. o. Kronecker: Vorl. ü. d. Theorie d. einf. u. vielf. Integrale. 216. o.

Az $x+y=c$ egyenesen feküsznek a pontok:

$$I=(-a,\ a+c),\quad P=(a,\ c-a),\quad Q=(c-b,\ b),\quad H=(b+c,\ -b).$$

Alkossuk meg a távolságokat (a melyek különböző előjelt vehetnek föl, a szerint, hogy a parallel koordinátatengelylyel egyirányúak vagy ellenkező irányúak)

$$OI=a+b+c,$$

$$AH=-a+b+c,\quad BI=a-b+c,\quad PD=QD=a+b-c.$$

Akkor (ha, mint szokásos, $\overline{MN}$-el MN távolság abszolut értékét jelöljük) formulánk azt állítja, hogy

$$\iint_{(R_2)} dxdy=\tfrac{1}{2}\{OI\cdot\overline{OI}\cdot-BI\cdot\overline{BI}-AH\cdot\overline{AH}-BD\cdot\overline{PD}\},$$

a mint az AH, BI és PD távolságok előjeleinek teljes diszkutálása után az ábrából közvetlenül következik.

Ha a, b, c tetszésszerinti reális értékeket vesznek föl, akkor az integrál

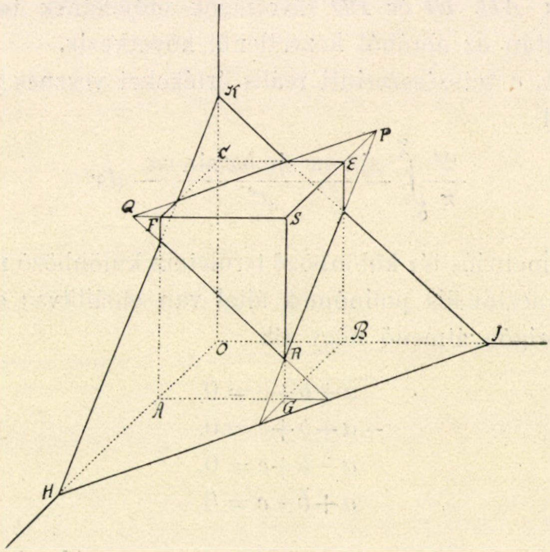
$$\frac{2^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx \sin cx}{x^3}\,dx$$

a háromdimenziós tér különböző területein különböző másodfokú homogén raczionális polinómok által van előállítva; ezen területek az origón átmenő négy sík

$$a+b+c=0,$$
$$-a+b+c=0,$$
$$a-b+c=0,$$
$$a+b-c=0$$

által vannak elválasztva és számuk $6+8=14$. A négy sík ugyanis a koordináták kezdőpontja mint czentrum körül leírt gömböt ugyanolyan módon osztja, mint egy a kristálytanból ismert alakzat, az oktaëder (1, 1, 1) és a koczka (1, 0, 0) átmetszése, ha az oktaëder diagonálisa a koczka élének éppen kétszerese; a nyolcz oktaëderlapnak a tér azon részei felelnek meg, a hol a koordináták a, b, c abszolut értékei által mért három egyenes darabból megalkotható egy háromszög: ezen területeken az integrált előállító raczionális másodfokú függvény három variábilisában symmetrikus; a koczka hat lapjának megfelelő területek azok, a hol az egyik koordináta abszolut értéke meghaladja a másik két koordináta abszolut értékeinek összegét; ezen területeken az integrált előállító raczionális függvény független a kitüntetett koordinátától és egyenlő a másik két koordináta négyszeres szorzatával, pozitiv vagy negativ előjellel. Ha (a, b, c) pont tehát a koordinátasíkok valamelyikében fekszik, az integrált előállító raczionális függvény zérussá lesz.

4. Négy argumentum esete. Felrajzoljuk a keresett köbtartalmat (4. ábra)



4. ábra.

$$O = (-a, -b, -c),$$

$$A = (a, -b, -c), \quad B = (-a, b, -c), \quad C = (-a, -b, c),$$

$$E = (-a, b, c), \quad F = (a, -b, c), \quad G = (a, b, -c),$$

$$S = (a, b, c),$$

Az $x+y+z=d$ síkon feküsznek a pontok

$$K=(-a,\ -b,\ a+b+d),$$
$$P=(d-b-c,\ b,\ c),\quad Q=(a,\ d-c-a,\ c),\quad R=(a,\ b,\ d-a-b).$$

Vegyük szemügyre a nyolcz távolságot:

$$OK=a+b+c+d,$$
$$EP=a-b-c+d,\quad FQ=-a+b-c+d,\quad GR=-a-b+c+d,$$
$$AH=AF+FQ,\quad BI=BG+GR,\quad CK=CE+EP,$$
$$=-a+b+c+d,\quad =a-b+c+d,\quad =a+b-c+d$$

és végül

$$PS=QS=KS=a+b+c-d.$$

Már most a formula azt állítja, hogy

$$\iiint\limits_{(R_3)} dxdydz = \frac{\overline{OK}^3-\overline{AH}^3-\overline{BI}^3-\overline{CK}^3+\overline{EP}^3+\overline{FQ}^3+\overline{GR}^3-\overline{PS}^3}{6}.$$

Áttérünk formulánk oly speciális eseteire, a melyekben az argumentumok száma tetszőleges, de a melyekben az egyik argumentum a többi fölött valaminő módon ki van tüntetve.

5. Legyenek $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n,\ a_{n+1}$ pozitivok és legyen

$$-a_1-a_2-a_3-\cdots-a_n+a_{n+1}\geqq 0,$$

akkor következik, hogy a kifejezésnek

$$\underset{(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\ldots,\,\varepsilon_n=\pm1)}{\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\varepsilon_3 a_3+\cdots+\varepsilon_n a_n+a_{n+1}}$$

mind a 2^n értéke pozitiv; mert hiszen 2^n-1-et ezen értékek közül úgy kapunk, hogy a 2^n-ikhez, a mely nem negativ, bizonyos pozitiv számokat adunk; továbbá világos, hogy a kifejezés

$$\underset{(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\ldots,\,\varepsilon_n,\,\varepsilon_{n+1}=\pm1)}{\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\varepsilon_3 a_3+\cdots+\varepsilon_n a_n+\varepsilon_{n+1} a_{n+1}}$$

2^{n+1} értékét úgy gondolhatjuk adottnak, hogy az imént megbeszélt 2^n értékhez ezek negativjait is hozzáveszszük. Formulánk szerint tehát

$$a_{n+1} \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1x \sin a_2x \ldots \sin a_{n+1}x}{x^{n+1}}dx =$$

$$=\frac{\sum\limits_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1)} (-1)^\nu (\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n+a_{n+1})^n}{n!}.$$

Azt mondom, hogy a jobboldalon álló kifejezés *identikusan*

$$= 2^n a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Tényleg a binomiális tétel szerint tagonként kifejtve, így írható

$$\frac{1}{n!}\sum(-1)^\nu(\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n)^n +$$

$$+\frac{a_n}{n!}\binom{n}{1}\sum(-1)^\nu(\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n)^{n-1}+\cdots$$

Már most tudjuk, hogy

$$(e^{a_1x}-e^{-a_1x})(e^{a_2x}-e^{-a_2x})\ldots(e^{a_nx}-e^{-a_nx}) = 2^n a_1 a_2 \ldots a_n x^n+\cdots$$

és hogy e kifejtés λ-ik együtthatója más úton kiszámítva

$$c_\lambda = \frac{\sum\limits_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1)}(-1)^\nu(\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n)^\lambda}{\lambda!},$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0, \quad c_n = 2^n a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Tehát a föltételek között:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0, \quad a_{n+1} \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin a_1x \sin a_2x \ldots \sin a_{n+1}x}{x^{n+1}}dx = \frac{\pi}{2}a_1 a_2 \ldots a_n.$$

5 bis. Ha $a_1, a_2, \ldots$ pozitivok és

$$a_{n+1} > a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\int_0^\infty \cos a_1x \cos a_2x \dots \cos a_nx \frac{\sin a_{n+1}x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin a_1x \dots \sin a_nx}{x^n} \cos a_{n+1}x dx = 0 \quad \text{etc.}$$

6. Legyen

$$a_1, a_2, \dots, a_n \geqq 0, \quad a_1+a_2+\cdots+a_n = A.$$

Továbbá legyen ugyan

$$a_{n+1} < A,$$

de az n kifejezés körül

$$\underset{(i=1,2,\dots,n)}{a_{n+1}-(A-2a_i)}$$

egyetlen egy se legyen negativ; akkor

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1x \dots \sin a_nx \sin a_{n+1}x}{x^{n+1}}\,dx=$$

$$= \frac{\sum(-1)^\nu(\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\cdots+\varepsilon_na_n)^n}{n!} -$$

$$- \frac{(-1)^n(-a_1-a_2-\cdots-a_n+a_{n+1})^n}{n!} -$$

$$- \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n-a_{n+1})^n}{n!} =$$

$$= 2^na_1a_2\dots a_n - \frac{2(A-a_{n+1})^n}{n!}.$$

6 bis. Ha $A-2a_i<a_{n+1}<A \ (i=1, 2, \dots, n)$

$$\int_0^\infty \frac{\sin a_1x}{x} \cos a_2x \dots \cos a_nx \frac{\sin a_{n+1}x}{x}\,dx=$$

$$= \frac{\pi}{2}a_1 - \frac{\pi}{2^n}(a_1+a_2+\cdots+a_n-a_{n+1}) \quad \text{etc.}$$

Látható továbbá, mely egyenlőtlenségek mellett igaz a formula

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1x \ldots \sin a_nx \sin a_{n+1}x}{x^{n+1}}\,dx=$$

$$=2^n a_1 a_2 \ldots a_n - \frac{2\,(A-a_{n+1})^n}{n\,!}+\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}(A-2a_i-a_{n+1})^n}{n\,!}$$

és a többi analógok, valamint azok, a melyek belőlük differencziálás által következnek.

7. Az integrál

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin rx}{x}\,dx$$

kifejezése a számok:

$$r+n,\ r+n-1-1,\ldots,\ r+n-\nu-\nu,\ldots,\ r-n$$

előjelétől függ.

Ugyanis integrálunk $n+1$ tag összege; ha

$$r+n-2\nu>0,$$

akkor a $\nu+1$-ik tag lesz

$$\binom{n}{\nu}\frac{(-1)^\nu(r+n-2\nu)^n}{n\,!},$$

míg ha

$$r+n-2\nu<0$$

a $\nu+1$-ik tag lesz

$$\binom{n}{\nu}\frac{(-1)^{1+n-\nu}(-r-n+2\nu)^n}{n\,!}=-\binom{n}{\nu}\frac{(-1)^\nu(r+n-2\nu)^n}{n\,!}.$$

Ha

$$r+n-2\nu=0,$$

akkor a kifejtésbe fölveszünk egy $\nu+1$-ik helyen álló zérustagot.

Mindezt összefoglalva

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin rx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2^n n\,!}\sum_{\nu=0}^{n}\varepsilon_\nu\binom{n}{\nu}(r+n-2\nu)^n,$$

a hol föltéve, hogy $r+n>0$, az ε_ν-k törvénye a következő: legyen μ egy olyan egész szám, hogy

$$r+n-2\mu \geqq 0, \quad r+n-2(\mu+1)<0,$$

azaz

$$\mu=\left[\frac{r+n}{2}\right].$$

Akkor $\varepsilon_0=1$ és minden tagtól a következőig *jelváltás* van, kivéve a $\mu+1$-ik és $\mu+2$-ik közt van *jelmaradás*, t. i.

$$\varepsilon_\mu\binom{n}{\mu}(r+n-2\mu)^n \quad \text{és} \quad \varepsilon_{\mu+1}\binom{n}{\mu+1}(r+n-2(\mu+1))^n$$

közt; azaz

$$\varepsilon_{i+1}=-\varepsilon_i$$

minden i-re, kivéve az $i=\mu$ értéket; ugyanis

$$\varepsilon_{\mu+1}=\varepsilon_\mu.$$

Vegyük tekintetbe az identitást:

$$1=\frac{(r+n)^n-\binom{n}{1}(r+n-2)^n+\binom{n}{2}(r+n-4)^n-\cdots+(-1)^n(r-n)^n}{2^n\cdot n!}$$

a mely könnyen levezethető, akár egy ezen pont 5. szám alatt található identitásból, akár $(r+n+2x)^n$ n-ik differencziáját képezve; tekintetbe vévén az eddig mondottakat

$$\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\frac{\sin rx}{x}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(-1+\frac{2}{2^n n!}\sum_0^{\left[\frac{n+r}{2}\right]}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}(r+n-2\nu)^n\right)$$

avagy

$$= -\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin(-rx)}{x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{2^n n!}\sum_0^{\left[\frac{n-r}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{\nu}(n-r-2\nu)^n\right).$$

7 bis.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos rx dx =$$

$$= \frac{\pi}{2^n \cdot (n-1)!}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n\pm r}{2}\right]} (-1)^\nu \binom{n}{\nu}(n\pm r-2\nu)^{n-1},$$

a hol vagy mindkét alkalommal $+$, vagy mindkét alkalommal $-$ olvasandó.[1] Ha $r=0$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{n^{n-1} - \binom{n}{2}(n-2)^{n-1} + \binom{n}{2}(n-4)^{n-1} -}{2^{n-1}(n-1)!},$$

a hol tehát a jobboldali summa csak addig folytatandó, a míg $n-2\nu>0$; az egyenlőséget igen könnyű lehozni az általános formulából is. P. o.:

---

[1] Bierens de Haan: Tables. T. 202. No. 7, 9, 39. Nouvelles Tables T. 159. No. 15, 16, 28. — Laplace: Th. an. des probabilités. III. kiadás. 169. o. — Sommerfeld l. c. geometriai levezetését adja a 7 bis. formulának, a numerikus faktort azonban hibásan hozza ki. Ha az «egységnyi élű n dimenziós simplex (tetraëder)» térfogata alatt a szorzatot értjük:

$$\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{2}\cdot\frac{a_3}{3}\cdot\frac{a_4}{4}\cdots\frac{a_n}{n},$$

a hol

$$a_1 = 1,\ \left(\frac{1a_1}{2}\right)^2 + a_2^2 = 1,\ \left(\frac{2a_2}{3}\right)^2 + a_3^2 = 1, \ldots \left(\frac{n-1}{a_n}a_{n-1}\right)^2 + a_n^2 = 1,$$

akkor könnyen korrigálhatjuk kis elnézését; az eredmény megegyezése mutatja, hogy mondott térfogatot így is *kell* értelmeznünk.

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{115\pi}{384}, \ldots$$

A 7. alatti formula többek közt a bevezetésül használt Laplace-féle probléma megoldását is tartalmazza.

I. és III. szerint ugyanis a keresett valószínűség

$$\int\int \cdots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin nx}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin (2r-n) x}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n n!} \sum_0^{[r]} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (2r-2\nu)^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{n!} \left\{ r^n - \binom{n}{1} (r-1)^n + \binom{n}{2} (r-2)^n - \cdots \right\}.$$

Ez Laplace megoldása.[1]

VII.

Hogy az eddigi eredményeket röviden összefoglalhassuk, behozzuk a jelölést

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_n x}{x^n} dx.$$

$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ függvény definiálva van n argumentumának összes reális értékrendszereire; a következőkben felsoroljuk sajátságait, a melyek összességükben elég jellegzetesek.

---

[1] Laplace: Th. an. des probabilités. III. kiadás. 256—257. o. Czuber: Bericht über Wahrscheinlichkeitsrechnung. 34—37. o. Jahresbericht d. deutsch. Math. Ver. 7. kötetében. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1908. 68—70. o.

1. Symmetrikus.

2. Páratlan argumentumainak bármelyikére nézve

$$\Phi(-a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = -\Phi(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

3. Homogén, még pedig $n-1$ fokszámmal, ha összes argumentumainak csak nem negativ faktorokkal való szorzására szoritkozunk; azaz, ha $t \geqq 0$

$$\Phi(ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = t^{n-1}\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

4. A legegyszerűbb, az egyargumentumú függvény, $\Phi(a)$ folytonos, ha $a \gtreqless 0$, véges ugrása van, ha $a=0$. Differencziálhányadosa létezik és zérus, ha $a \gtreqless 0$ nem létezik, vagy ha úgy tetszik végtelen nagy, ha $a=0$.

Az integrálból formális differencziálással kapott kifejezés

$$\int_0^\infty \cos ax dx$$

a végtelen integrálok közönséges definicziója szerint nem bír értelemmel.

A két argumentumú függvény, $\Phi(a, b)$ mindenütt folytonos. Parcziális differencziálhányadosai

$$\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial a} = \Phi(a+b)+\Phi(-a+b), \quad \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial b} = \Phi(a+b)+\Phi(a-b),$$

mint az legegyszerűbben kijön, ha az a, b síkot az

$$a+b=0, \quad a-b=0$$

egyenesekkel négy részre osztjuk és a differencziálást az explicit alakon, mind a négy részben külön-külön elvégezzük. Ezen a két egyenesen ugrást szenvednek a differencziálhányadosok és nincsenek definiálva.

A formális differencziálással nyert integrálok (Dirichlet szakadó faktora)

$$\frac{2^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin bx}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx + $$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(-a+b)x}{x}\,dx,$$

$$\frac{2^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx + $$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx$$

megadják a deriváczió értékét és a mondott egyeneseken középértékeket vesznek föl.

Három és több argumentum esetén a derivácziókat abszolut konvergens integrálok állítják elő:

$$\frac{\partial}{\partial a_n}\,\frac{2^n}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_n x}{x^n}\,dx =$$

$$= \frac{2^n}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_{n-1} x}{x^{n-1}}\cos a_n x dx =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_{n-2} x \sin(a_{n-1}+a_n)x}{x^{n-1}}\,dx +$$

$$+ \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_{n-2} x \sin(a_{n-1}-a_n)x}{x^{n-1}}\,a_x.$$

Tehát általában kimondhatjuk: *ha csak $n \geq 2$, az n argumentumos függvény folytonos. Derivácziói léteznek és folytonosak, az $n-2$-ik rendig bezárólag; $n-1$ és n-edrendű derivácziói szintén léteznek, kivéve bizonyos értékrendszereket, a melyek n dimenziós mértéke zérus; az $n-1$-edrendű deriváczió mondott értékrendszereken véges ugrást szenved, míg az őt előállító integrál bizonyos középértékeket vesz föl; az n-edrendű deriváczió, minden pontban, a hol létezik, zérus.* A függvények továbbá eleget tesznek a differencziálegyenleteknek:

$$\frac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)}{\partial a_n} = \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}+a_n) +$$
$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}-a_n),$$

$$(n-1)\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\nu=1}^{n} a \frac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial a_\nu}$$

az utóbbinak jelen pont 3. értelmében.

5. Függvényeink definiálhatók a három föltétel által:

α) $\Phi(a) = \operatorname{sgn} a$;

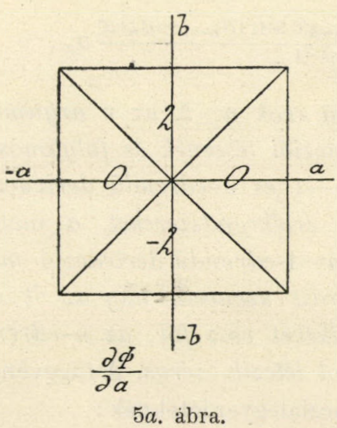
β) $$\frac{\partial\Phi(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_n} = \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}+a_n) +$$
$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}-a_n);$$

γ) $\Phi(0, 0, \ldots, 0) = 0.$

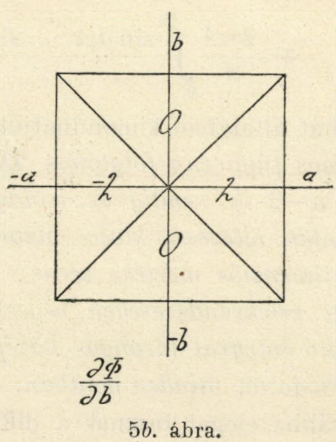
A differenciálegyenletbe behelyettesitve $\Phi(a)$ értékét, a következő értékeket kapjuk a kétargumentumos függvénydifferencziálhányadosai számára

$$\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial a} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{cases} \qquad \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial b} = \begin{cases} 2 & |a|>|b|, \quad a>0 \\ -2 & |a|>|b|, \quad a<0 \\ 0 & |a|<|b|, \quad b>0 \\ 0 & |a|<|b|, \quad b<0 \end{cases}$$

amint azt legkényelmesebb fölrajzolni az (a, b) sikon (5. ábra):



5a. ábra.

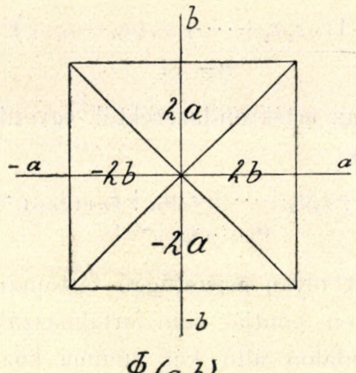


5b. ábra.

A sík négy részén külön-külön integrálva megállapitható, hogy az integrál, additiv konstansoktól eltekintve nem lehet más, mint

$$\Phi(a, b) = \begin{cases} 2b & |a| > |b|, \quad a > 0 \\ -2b & |a| > |b|, \quad a < 0 \\ 2a & |a| < |b|, \quad b > 0 \\ -2a & |a| < |b|, \quad b < 0 \end{cases}$$

Az adott (γ) kezdeti föltételből mind a négy konstans zérusnak adódik; felrajzolva az eredményt (6. ábra)



6. ábra.

kitünik, hogy függvényünk folytonos; azonkívül így irható (VI, 2.

$$\Phi(a, b) = \frac{\Sigma'(-1)^{\nu}(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2)}{1!}, \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \pm 1)$$

a hol az összegezés a 4 lehetséges $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b$ kifejezés közül csak 2 *nem negativra* van kiterjesztve.

Tegyük most már föl, hogy

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\Sigma'(-1)^{\nu}(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n)^{n-1}}{n-1!},$$

a hol a Σ jel mellé tett vesszővel egy olyan összegezést akarok jelölni, a melyben az $\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n$ kifejezésnek csak pozitiv értékei fordulnak elő, a mint az az V. pont elején bővebben jellemezve volt; bizonyitsuk be az analóg formulát $n+1$ argumentumra.

A differencziálegyenlet szerint (β)

$$\frac{\partial \Phi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})}{\partial a_{n+1}} = \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1}) +$$
$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - a_{n+1}) =$$
$$= \frac{\Sigma'(-1)^\nu \left(\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n (a_n + a_{n+1})\right)^{n-1}}{n-1\,!} +$$
$$+ \frac{\Sigma'(-1)^\nu \left(\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n (a_n - a_{n+1})\right)^{n-1}}{n-1\,!}.$$

Tekintsünk el az értékrendszerektől egyenlőre, a melyek a 2^n síkon feküsznek

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \varepsilon_{n+1} a_{n+1} = 0$$
$$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1} = \pm 1)$$

és vizsgáljunk csak olyan összefüggő tartományokat, a melyek ezen síkok egyetlen pontját sem tartalmazzák. Ezen tartományokban a jobboldalon álló két summa közül valamelyiknek egy tagja sem lehet *identikus* a másik egy tagjával; mert hiszen az első summa tagjaiban a_n és a_{n+1} megegyező előjelüek, míg a másodikban ellenkezőek; tehát a két 2^{n-1} tagú summát összevonhatjuk egyetlen 2^n tagúba

$$\frac{\partial \Phi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})}{\partial a_{n+1}} =$$
$$= \frac{\Sigma'(-1)^\nu (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \varepsilon_{n+1} a_{n+1})^{n-1}}{n-1\,!},$$

a hol a vessző a Σ jel mellett megint a pozitiv értékekre való szoritkozást parancsolja; ν jelenti a negativok számát az n egység körül: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, azaz ε_{n+1} irrelevans a tag előjelére. Ezen alakjából a parcziális differencziálhányadosnak látható, hogy az a_{n+1} szerint való differencziálásnál egy variábilis sincs kitüntetve a másik felett $a_1, a_2, \ldots, a_n$ körül.

Fölírva az $n+1$ differencziálhányadost, totális differencziálegyenletet kapunk $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$-re; differencziálegyenletünk eleget tesz a integrabilitási föltételeknek, mert hiszen

$$\frac{\partial^2 \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}{\partial a_n \partial a_{n+1}} =$$

$$= \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}+a_n+a_{n+1}) +$$

$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}-a_n-a_{n+1}) +$$

$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}-a_n+a_{n+1}) +$$

$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}+a_n-a_{n+1}) =$$

$$= \frac{\partial^2 \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}{\partial a_{n+1} \partial a_n}.$$

Föltehetjük, hogy az egyenletben (β) a jobboldalak folytonosak; mert hiszen a jobboldalak két-két n argumentumos Φ összegei és a folytonosság bizonyítva volt $n=2$ esetén. Tehát $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ a

$$\Phi(0, 0, \ldots, 0) = 0$$

kezdőföltétel által az egész térben meghatározott, folytonos függvény.

Az imént jelzett összefüggő tartományok mindegyikének belsejében $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ csak egy additiv konstansban (ezen konstans esetleg minden tartományban más és más lehetne) különbözhetik a kifejezéstől

$$\frac{\Sigma'(-1)^\mu (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1})^n}{n!},$$

a hol μ a negativok számát jelenti mind a $\mu+1$ egység közül: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1} = \pm 1$. Mert valóban a mondott kifejezés differencziálhányadosai rendre megegyeznek $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ differencziálhányadosaival; p. o. az a_{n+1} szerinti:

$$\frac{\Sigma' \varepsilon_{n+1} (-1)^\mu (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{n+1} a_{n+1})^{n-1}}{n-1!},$$

a hol

$$\varepsilon_{n+1}(-1)^{\mu} = (-1)^{\nu}.$$

A (γ) kezdőföltételből kiadódik, hogy az additiv konstans az összes térrészekben ugyanaz, még pedig zérus. Ebből következik, hogy a fölirt kifejezés az egész térben folytonos; evidens, hogy *pozitiv multiplikátor* esetében homogén n-edfokú; nem nehéz bizonyítani, hogy páratlan.

Így jutottunk el új úton a régi eredményhez; hasonló eljárás alkalmazható általában a

$$2^n \int_0^\infty \varphi(x) \frac{\sin a_1 x \ldots \sin a_n x}{x^n} dx$$

integrál tárgyalására; BIERENS DE HAAN[1] végigvitte a számítást

$$\varphi(x) = e^{-px}$$

esetén $(p > 0)$; (α), (β), (γ) föltételek közül csupán az elsőt kell mással helyettesiteni.

6. *Hasítsuk a 2^{n-1} síkkal*

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n = 0, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

a melyek mind a koordináták kezdőpontján haladnak keresztül az n dimenziós teret részeire; a $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ függvény minden ilyen térrészben egy raczionális $n-1$-edfokú homogén függvénye által állíttatik elő n variábilisának; ezen raczionális függvények térrészről-térrészre általában mások, de a határokon folytonosan mennek át egymásba értékeik $(n \geqq 2)$; *hasonló áll parcziális deriváczióikra* $(n \geqq 3)$. *Ezen raczionális függvények együtthatói raczionális számok és az előfordulható legnagyobb nevező* $(n-1)!$ Az előzőekben kitaláltunk egy jelölést, a mely mindezen függvényeket térrészről-térrészre előállítani képes.

[1] BIERENS DE HAAN: Exposé ... des methodes d'évaluation des intégrales définies. 344—346. o.; különösen a 346. o. jegyzete.

A térosztást tanulmányoztuk, különböző helyeken elszórva, $n=1, 2, 3$ esetén.

Még egy tulajdonságot akarunk levezetni a differencziálegyenletből.

7. *Legyenek az argumentumok mind pozitivok és tartsuk az első n-et állandónak, míg az utolsó argumentum zérustól végtelenig nő; ezen körülmények közt* $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *pozitiv,*

$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ *folyton nő, a míg* a_{n+1} *0-tól*

$$a_1+a_1+\cdots+a_n$$

-ig nő.

$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ *nem változik, ha* a_{n+1}, $a_1+a_2+\cdots+a_n$*-től végtelenig nő.*

Mindezen tulajdonságok evidensek a kétargumentumos függvényre, mert hiszen

$$\Phi(a, b) = 2 \text{ minor } (a, b). \qquad a, b \geqq 0$$

Tegyük most már föl, hogy mondott tulajdonságok be vannak bizonyitva az n argumentumos függvényre. Az utolsó két tulajdonságból következik: legyen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r, s>0$; ha

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r) = \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, s)$$

az csak úgy lehet, hogy

$$\begin{aligned} &\text{vagy} \quad r = s, \\ &\text{vagy} \quad r, s \geqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}. \end{aligned}$$

Mert ha fölteszszük, hogy az egyenlőség a két Φ közt fennáll és hogy $s>r$, akkor nem lehet, hogy $r<a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$; mert akkor s a két intervallum valamelyikébe esnék

$$(r, a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}), \quad (a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}, \infty).$$

Az első intervallumba nem eshetik, mert hiszen akkor

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, s) > \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r)$$

volna; a második intervallumba sem eshetik, mert akkor meg az állana fönn, hogy

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, s) =$$

$$= \Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) > \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, r).$$

Így a föltevésből, hogy $s>r$ következik, hogy

$$r \geqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}; \qquad \text{c. qu. e. d.}$$

Vizsgáljuk már most a differencziálhányadost:

$$\frac{\partial\Phi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})}{\partial a_{n+1}} = \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n+a_{n+1}) +$$
$$+ \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n-a_{n+1}).$$

Ha $0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$, a jobboldal két tagja közül egyik sem negativ és legalább az egyik pozitiv.

Ha $a_n < a_{n+1}$, irjuk így az egyenlőséget

$$\frac{\partial\Phi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})}{\partial a_{n+1}} = \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}+a_n) -$$
$$- \Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}-a_n).$$

Hogy ezen kifejezés zérus legyen és ne pozitiv, ahhoz szükséges az éppen mondottak szerint, hogy

$$a_{n+1}-a_n \geqq a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$$

és elégséges is, de zérussá levése sohasem következik be, a míg

$$a_{n+1}-a_n < a_1+\cdots+a_{n-1}.$$

Tehát összefoglalva $\dfrac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})}{\partial a_{n+1}}$ pozitiv, a míg

$$0 \leqq a_{n+1} < a_1+\cdots+a_n$$

és zérus, hogy ha

$$a_{n+1} \geqq a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

Tekintve, hogy maga $\Phi(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0$, ha $a_{n+1} = 0$ a mondott tulajdonságok az $n+1$ argumentumos függvényre is ki vannak mutatva.

Korollárium. *Ha az összes argumentumok pozitivok,*

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \leqq 2^n a_1 a_2 \ldots a_n$$

és mivel ez bármely argumentumra fennáll

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \leqq 2^n (a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{n}{n+1}}.$$

Mindezen tulajdonságok többé-kevésbbé evidensek, tekintettel az integrál geometriai jelentésére. Így p. o. a parcziális derivácziók:

$$\frac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}{\partial a_1},$$

$$\frac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}{\partial a_n}$$

mindig két-két szemköztfekvő, egymással egyenlő határlap $n-1$ dimenziós kiterjedésének összegét jelentik;

$$\frac{\partial\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})}{\partial a_{n+1}},$$

pedig két egyenlő határlap projekczióinak összegét, ha a projekczió orthogonális és a projekcziósík valamelyik koordinátasík. Hasonló módon értelmezhetőek a vegyes differencziálhányadosok

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial a_i \partial a_j}, \frac{\partial^3\Phi}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k}, \ldots \quad \text{etc.}$$

A differencziálhányadosok jelentése lehetővé teszi, hogy ezen fejezet formuláit és okoskodásait is elemi geometriai meggondolásokkal interpretáljuk.

VIII.

Az eddigiek lényegileg egy határozott integrál theoriájáról szóltak; áttérünk valószínűségszámítási kérdések tárgyalására.

Az eddigi fejtegetés kiindulópontját az elemi (diszkontinuus) valószínűségszámítás egy határkérdése képezte; Laplace problémájában ugyanis határértékét kerestük egy bizonyos valószínűségnek, ha a golyók száma végtelenül növekszik, mig a húzások száma állandó marad. A valószínűségszámítás egy másik, nevezetes határkérdése az, a mely Bernoulli tétele által nyert megoldást; ez az előbbinek bizonyos fokig ellentétje: ugyanis itten a húzandó golyók száma és eloszlása állandó marad és a húzások száma növekszik végtelenül.

Szorítkozzunk egyenlőre a legegyszerűbb esetre. A valószínűségszámítás egyik legrégibb, ma már igen könnyen megoldható kérdése a következő: mi a valószínűsége azon eseménynek, hogy a fej és írás játékban, n dobás alatt, fej ne essék többször, mint $\frac{n}{2}+k$-szor és ne essék kevesebbszer, mint $\frac{n}{2}-k$-szor; ehhez fűződik a további kérdés: törekszik-e valamely határ felé és milyen határ felé törekszik ezen valószínűség, ha a dobások száma végtelenül növekszik?

Az n dimenziós geometria nyelvén, a kérdésnek a következő alakot is adhatnók: vizsgáljuk az n dimenziós térben a koczkát, a melynek lapjai a koordinátasíkhoz párhuzamosak, a melynek élhossza az egység és a melynek középpontja az origó. Ezen koczkát a koordinátasíkok 2^n egymással egyenlő részkoczkára darabolják, a melyek mindegyikén mi különösen ki akarunk emelni egy sarkot, mondjuk a «fősarkot», t. i. a részkoczka azon pontját, a mely távolabb van a koordináták kezdőpontjától, mint bármely más pontja. A részkoczkákat már most sorozzuk két osztályba; az első osztályba azok tartozzanak, a melyek fősarkának koordinátái körül a *pozitivok* nagyobb számmal vannak, mint $\frac{n}{2}+k$, vagy pedig kisebb számmal, mint $\frac{n}{2}-k$; a második osztályba tartozó részkoczkák fősarkainak tehát legalább $\frac{n}{2}-k$ és legfeljebb $\frac{n}{2}+k$ pozitiv koordinátája van. Így a koordináták összege az utóbbi esetben nem nagyobb, mint

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{2}+k\right)-\left(\frac{n}{2}-k\right)\right\}=k$$

és nem kisebb, mint

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n}{2}-k\right)-\left(\frac{n}{2}+k\right)\right\}=-k,$$

azaz a második osztályba tartozó koczkák fősarkai a két parallel sík

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k,\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=-k$$

között feküsznek; a második osztályba tartozó koczkák összes térfogatát képezve, megkapjuk az előrebocsátott *elemi* valószinűségszámitási feladat megoldását; valóban, a fősarkok pozitiv koordinátáit «fej» negativ koordinátáit «irás» dobásoknak feleltetvén meg, minden ilyen másodosztályú koczka egy kedvező esetet reprezentál és egy ilyen koczka térfogata $\frac{1}{2^n}$. Az elemi feladathoz fűződő határkérdés pedig azt követeli, hogy ezen térfogatot, állandó k mellett, minden dimenzióban megalkotva, az így kapott sorozatot vizsgáljuk.

A MOIVRE-LAPLACE problémánál a geometriai kifejezés azonnal evidenssé tette a keresett határérték létezését; jelen esetben ez egyáltalán nem áll így.

Alkalmazzuk azonban, analóg módon, a generátor-függvények módszerét. Az n-ik hatvány

$$(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})^n$$

összevonás nélkül való kiszorzásának minden tagja az n dobásos fej és irás játék egy-egy esélyét reprezentálja, $e^{i\alpha}$ tényezőt «fej» dobásnak, $e^{-i\alpha}$ tényezőt «irás» dobásnak feleltetvén meg. Ha ν-ször dobtunk fejet, akkor $n-\nu$-ször dobtunk irást és ezen dobássorozatnak megfelelő tag értéke:

$$e^{i\nu\alpha}\,e^{-i(n-\nu)\alpha}=e^{i(2\nu-n)\alpha}.$$

Ha pedig ν-szőr fejet dobni a föltételek értelmében kedvező ezt, ahhoz

$$\frac{n}{2}-k\leqq\nu\leqq\frac{n}{2}+k,$$

$$-2k\leqq 2\nu-n\leqq+2k.$$

Tehát ha a szóbanforgó binóm összevont és $e^{i\alpha}$ hatványai szerint rendezett n-ik hátrányában $e^{i\alpha}$

$$-[2k], [2k]+1, \dots -1, 0, +1, \dots [2k]-1, [2k]$$

-ik hatványainak összes együtthatóit összeadjuk akkor megkapjuk a kedvező esélyek számát. Ezen együttható-összeget ilyen módon lehet előtüntetni:[1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})^n(1+2\cos\alpha+\cdots+2\cos[2k]\alpha)\,d\alpha.$$

A kedvező esetek számát 2^n-el elosztva, azt kapjuk, hogy a szóbanforgó elemi valószínűségszámitási kérdés megoldása

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})^n(1+2\cos\alpha+\cdots+2\cos[2k]\alpha)\,d\alpha =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n\alpha\,\frac{\sin(2[2k]+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n 2\beta\,\frac{\sin(2[2k]+1)\beta}{\sin\beta}\,d\beta.$$

Az elemi feladathoz fűződő kérdéstétel szerint pedig ezen kifejezés határértékét kell venni, végtelenül növekvő n-re. Ezen határérték zérus, mert egyáltalában

$$\lim_{n=\infty}\int_0^a \cos^n x\,\varphi(n,x)\,dx = 0,$$

a hol a egy állandó szám és $\varphi(n, x)$ minden $0 \leqq x \leqq a$, $n > 0$ értékrendszerre fix véges korlát alatt marad; ezen egyszerű tényt még sokszor lesz alkalmunk fölhasználni.

[1] V. ö. POISSON, l. c. 181. o.

Miután így meggyőződtünk róla, hogy annak a valószínűsége, hogy a legvalószínűbb eloszlástól való eltérés kisebb maradjon, mint egy fix korlát ($=k$), végtelenül növekvő dobásszám esetén zérus felé konvergál, megvizsgálhatnók általában, hogy milyen határ felé tart azon esemény valószínűsége, hogy a fej és írás játékban n dobás alatt ne essék többször fej mint $\frac{n}{2}+f(n)$-szer és ne is essék kevesebbszer, mint $\frac{n}{2}-f(n)$-szer. Látjuk, hogyha $f(n)$ végtelenül növekvő n-re véges korlát alatt marad, akkor a szóbanforgó határérték zérus; megemlékezve LAPLACE klasszikus eredményéről ezt a választást teszszük:

$$f(n)=\lambda\sqrt{n},$$

a hol λ egy állandó szám;[1] ezen választásnak geometriai értelme, hogy olyan részkoczkák össztérfogata képezendő, a melyekben a fősarkok koordinátáinak összege abszolute kisebb, mint egy a koczka diagonálisával ($=\sqrt{n}$) minden dimenzióban állandó arányban álló hosszúság.

Röviden keresendő a határérték:

$$\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2a)^n\,\frac{\sin(2[2\lambda\sqrt{n}]+1)a}{\sin a}\,da=v(\lambda).$$

---

[1] A mennyiben *határ*értékről és nem *közelítő* értékről van szó, BERNOULLI problémájának szokásos, a tankönyvekben található, STIRLING formuláján, LAPLACE nyomán induló tárgyalása *nem* kielégítő: v. ö. p. o. BERTRAND, BOBEK, BOREL, BRUNS, CZUBER, POINCARÉ tankönyveit. Ugyanis vizsgálni kell egy összeg határértékét, a melyben az összeadandók száma végtelenül szaporodik, míg minden egyes összeadandó zérus felé tart; ll. cc. pedig meghatározzák minden egyes összeadandó közelítő értékét külön-külön, a nélkül, hogy megmutatnák, hogy ezáltal az egész összegen elkövetett hiba zérus felé tart. Ezen eljárás jogosulatlansága akkor tűnik teljes mértékben szemünkbe, ha LAPLACE gondolatának pontos keresztülvitelét olvassuk, mint JORDAN Cours d'Analyse II, 2. kiadás, 185—189. o. — POISSON l. c. szintén csak egy tagot vizsgál; tárgyalása hiányait, azt hiszem, sikerülni fog a következőkben, kevés fáradtsággal pótolnom.

Már most

$$\frac{\sin\left(2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]+1\right)\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\sin 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha+\cos 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\alpha=$$

$$=\frac{\sin 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\alpha}{\alpha}+\sin 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\alpha\left\{\operatorname{cotg}\alpha-\frac{1}{\alpha}\right\}+$$

$$+\cos 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\alpha=\frac{\sin 4\lambda\sqrt{n}}{\alpha}+2\left\{\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]-\right.$$

$$\left.-2\lambda\sqrt{n}\right\}\cos\left\{\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]+2\lambda\sqrt{n}\right\}\alpha\,\frac{\sin\left\{\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]-2\lambda\sqrt{n}\right\}\alpha}{\left\{\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]-2\lambda\sqrt{n}\right\}\alpha}$$

$$+\sin 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\left\{\operatorname{cotg}\alpha-\frac{1}{2}\right\}+\cos 2\left[2\lambda\sqrt{n}\,\right]\alpha.$$

Ezen utolsó kifejezés négy összeadandó összege, a melyek közül a három utolsó α és n minden számba jövő értékére könnyen kiszámítható fix korlát alatt marad; tehát egy röviddel ezelőtt tett megjegyzés szerint

$$v(\lambda)=\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\alpha)^n\,\frac{\sin 4\lambda\sqrt{n}\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{a}(\cos 2\alpha)^n\,\frac{\sin 4\lambda\sqrt{n}\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

a hol a akármilyen fix érték a $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum belsejében.

Lemma.

$$\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}}^{a}(\cos 2\alpha)^n\,\frac{\sin 4\lambda\sqrt{n}\,\alpha}{\alpha}\,d\alpha=0$$

bármily fix szám is legyen ε a $(0,\frac{1}{2})$ intervallum belsejében.

Tényleg

$$\left| \frac{\sin 4\lambda \sqrt{n}\, a}{a} \right| \leqq 4\lambda \sqrt{n},$$

$$|\cos 2a|^n = (1-\sin^2 2a)^{\frac{n}{2}} < e^{-\frac{n}{2}\sin^2 2a} \leqq e^{-nka^2},$$

a hol k minimális értéke a kifejezésnek

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2a}{2a}\right)^2 4$$

a $(0, a)$ intervallumban; k-ról tudjuk, hogy nem zérus, hiszen $a < \frac{\pi}{2}\cdot$ Tehát

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}}^{a} (\cos 2a)^n \frac{\sin 4\lambda \sqrt{n}\, a}{a}\, da \right| < 4\lambda \sqrt{n}\, \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}}^{a} e^{-nka^2} da <$$

$$< 4\lambda \sqrt{n}\, e^{-kn^{2\varepsilon}},$$

a hol az utolsó egyenlőtlenséget azáltal kaptuk, hogy az integrandus helyébe mindenütt maximális értékét helyettesítettük. Ilyen módon a lemma bizonyítva van és

$$v(\lambda) = \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}} (\cos 2a)^n \frac{\sin 4\lambda \sqrt{n}\, a}{a}\, da =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{n^\varepsilon} \left(\cos 2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^n \frac{\sin 4\lambda x}{x}\, dx.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\cos 2 \frac{x}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{2x^2}{n} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{n^2}\theta, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1$$

$$\log \left(\cos \frac{2x}{\sqrt{n}} \right)^n =$$

$$= n\left\{-\frac{2x^2}{n}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{n^2}\theta-\frac{\theta'}{2}\left(-\frac{2x^2}{n}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{n^2}\theta\right)^2\right\}=$$

$$= -2x^2+\frac{x^4}{n}\left(\frac{2}{3}\theta-2\theta'+\frac{4}{3}\frac{x^2}{n}\theta\theta'-\frac{2}{9}\frac{x^4}{n^2}\theta^2\theta'\right)$$

ε-t szabadon választhatjuk a $(0, \frac{1}{2})$ intervallum belső pontjai körül; válaszszuk p. o. $\frac{1}{8}$-nek, akkor az összes szóba jövő értékrendszerekre

$$\log\left(\cos\frac{2x}{\sqrt{n}}\right)^n = -2x^2+\frac{x^4}{n}\vartheta K,$$

a hol K egy fix szám és ϑ x és n változóknak egy olyan függvénye, a melynek értékkészlete -1 és $+1$ közé van zárva.

$$\left(\cos\frac{2x}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-2x^2}e^{\frac{x^4}{n}\vartheta K}.$$

Azt állítom, hogy

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_0^{n^{\frac{1}{8}}}\left(\cos\frac{2x}{\sqrt{n}}\right)^n\frac{\sin 4\lambda x}{x}dx-\int_0^{n^{\frac{1}{8}}}e^{-2x^2}\frac{\sin 4\lambda x}{x}dx\right)=0.$$

Tényleg a határértéket meghatározó sorozat tagjai abszolute kisebbek, mint a sorozatéi:

$$4\lambda\left(e^{Kn^{-\frac{1}{2}}}-1\right)\int_0^\infty e^{-2x^2}dx.$$

Mindezt összefoglalva

$$v(\lambda)=\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{n^{\varepsilon}}e^{-2x^2}\frac{\sin 4\lambda x}{x}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-2x^2}\frac{\sin 4\lambda x}{x}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin 2\lambda\sqrt{2}\,x}{x}dx$$

$v(\lambda)$ függvényt más alakra akarjuk hozni; mindenekelőtt látható, hogy

$$v(0)=0.$$

Továbbá

$$\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\lambda\sqrt{2}\,x dx=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\lambda^2}$$

egy ismert formula szerint.[1] Következésképpen

$$v(\lambda)=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda} e^{-2x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda\sqrt{2}} e^{-x^2}dx, \quad v(\infty)=1.$$

Ez LAPLACE ismert klasszikus eredménye.

Tétel. Azon esemény valószínűsége, hogy a fej és írás játékban n dobás közül ne essék többször fej, mint $n+\lambda n^{\alpha}$-szor és ne kevesebbszer, mint $n-\lambda n^{\alpha}$-szor, (λ és α fix pozitiv számok) végtelenül növekvő n esetére egy határértékhez közeledik; ezen határérték zérus, ha $\alpha<\frac{1}{2}$, egyenlő az egységgel, ha $\alpha>\frac{1}{2}$, zérus és az egység között bármely értéket fölvehet, λ választása szerint, ha $\alpha=\frac{1}{2}$.

Az $\alpha=\frac{1}{2}$ esetet éppen az imént intéztük el; vizsgáljuk p. o. az $\alpha>\frac{1}{2}$ esetet; meg fogom mutatni, hogy a szóbanforgó valószinűség, elég nagy n esetén, nagyobb mint $1-\varepsilon$; hogy az egységnél sohasem lehet nagyobb, az a definiczióból következik.

Mindenekelőtt legyen k egy olyan nagy szám, hogy

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{2}k} e^{-x^2}dx>1-\varepsilon$$

k-t megválasztva, legyen N egy olyan nagy szám, hogy bármely n-re, a mely nagyobb nála

$$\frac{k}{\lambda}<n^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

a miből következik, hogy ugyanezen n-ekre

$$k\sqrt{n}<\lambda n^{\alpha}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x)^n\frac{\sin(2[2k\sqrt{n}]+1)x}{\sin x}dx<$$

$$<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x)^n\frac{\sin 2([2\lambda n^{\alpha}]+1)x}{\sin x}dx,$$

[1] P. o. RIEMANN-WEBER: Part. Diff. I. 144. o. JORDAN: Cours d'Analyse II. 287—288. o.

a mely utóbbi egyenlőtlenségnek jobb- és baloldala két valószinűséget jelent; k választása értelmében a baloldali valószinűség határértéke nagyobb mint $1-\varepsilon$, tehát a jobboldalié sem lehet kisebb; c. qu. e. d.

Poisson módszere, a melyet itt szigorú alakjában ismertettem, csak a trigonometrikus és exponencziális függvények néhány egyszerű tulajdonságának ismeretét tételezi föl; itt a legegyszerűbb esetben volt bemutatva, de nagy általánositást enged meg.

IX.

Poisson[1] megvizsgált egy valószinűségszámitási kérdést, a mely általánosabb, mint az, a mely Bernoulli tétele által nyert megoldást. Gondoljuk, hogy két egymást kizáró esemény esélyei kisérletről-kisérletre változnak; gondoljuk p. o., hogy urnáknak hosszú sora van felállitva, mindegyik vörös és zöld golyókkal telve és a vörös golyók számának aránya a zöldek számához urnáról-urnára általában más, t. i. rendre

$$p_1 : q_1,\ p_2 : q_2, \ldots, p_n : q_n, \ldots$$

a hol

$$p_1+q_1=1,\ p_2+q_2=1, \ldots, p_n+q_n=1, \ldots$$

Poisson megvizsgálta a kérdést; mi azon eshetőség valószinűsége, hogy n húzás alatt ne húzzunk többször vörös golyót, mint

$$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n+\lambda\sqrt{n}$$

-szer és ne kevesebbszer, mint

$$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n-\lambda\sqrt{n}$$

-szer, föltéve, hogy n igen nagy szám; az eredményt, a melyhez jutott és a mely hasonló alakú mint Laplace-é «nagy számok

[1] V. ö. különösen Recherches etc. 246. o. és köv.

törvényének» nevezte el. A nagy számok törvényének vannak védői és támadói, de úgy látszik, a védők egészen más dolgot védenek, mint a mit a támadók támadnak. Lehetséges, hogy a variábilis esélyek POISSON-féle schemája hivatottabb a «statisztikai törvényszerűséget» exemplifikálni és magyarázni, mint a szűkebb BERNOULLI-féle schema; hogy POISSON schemája használható és szerencsés tudományos metaphora-e, az olyan kérdés, a melynek eldöntése, statisztikai megfigyeléseken fordulván meg a dolog, állandóan függőben van; ellenben POISSON munkáján mindenekelőtt a mathematikai szabatosság hiánya esett kifogás alá.[1] Kétségbevonták határátmeneteinek jogosultságát és a mi még súlyosabb, rámutattak arra, hogy nincsenek kielégítő módon körvonalozva a feltételek, a melyek közt a «nagy számok törvénye» érvényes.[2]

Azt hiszem, a «nagy számok törvényének» alkalmazására és ellenőrzésére nézve sem lehet teljesen közömbös, hogy vajjon a törvény föltételei preczize vannak-e kimondva vagy sem és hogy ezen föltételekből korrekt módon van-e bizonyítva a törvény vagy sem. Talán nem végzek teljesen fölösleges munkát,[3]

---

[1] TCHEBYCHEF: Oeuvres I. 17. o. Toute ingénieuse que soit la méthode employée par le célèbre Géometre, elle ne fournit pas la limite de l'erreur que comporte son analyse approximative, et par cette incertitude sur le valeur de l'erreur la démonstration de la proposition manque de rigueur.

BERTRAND: Calcul des probabilités 90. o. (2. változatlan kiadás.) La généralisation proposée par POISSON sous le nom de loi des grandes nombres manque non seulement de rigueur, mais de précision. Les conditions supposées dans l'énoncé échappent par le vague à toute appréciation mathématique.

[2] Hogy $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ tetszőleges választásánál nem áll fenn mindig a nagy számok törvénye, azt természetesen POISSON is tudja: ... ce produit sera *généralement* une très petite quantité... Il n'y aurait d' exception que si les facteurs... convergeaient indéfiniment vers l'unité... cette circonstance supposerait, que l'une des chances des deux événements... ou leur produit $p_i q_i$ décrût indéfiniment pendant la série des épreuves. Recherches 249. o. Látni fogjuk, hogy POISSONT e pontban sem hagyta cserben tapintata.

[3] CZUBER új tankönyvében kritika nélkül reprodukálja POISSON bizonyítását. Wahrscheinlichkeitsr. 1908. I. 152—160. o.

ha megmutatom, hogy POISSON számítása lényegileg helyes, bebizonyítva a következő tételt:

Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *nemnegativ számok*

$$p_1+q_1=1,\ p_2+q_2=1, \ldots, p_n+q_n=1, \ldots$$

a melyek azon tulajdonsággal bírnak, hogy a sorozat

$$p_1q_1,\ \frac{p_1q_1+p_2q_2}{2}, \ldots, \frac{p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n}{n}, \ldots$$

egy határozott, zérustól különböző határérték felé törekszik. Akkor egy olyan kisérletsorozatra, a melyben az elvárt esemény valószínűsége az első, második, harmadik,... kisérlet alkalmával rendre $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *fennáll a nagy számok törvénye; azaz annak a valószínűsége, hogy n kisérlet alatt az elvárt esemény ne következzék be kevesebbszer, mint*

$$p_1+p_2+\cdots+p_n-\lambda n^\alpha$$

-szor és ne is következzék be többször, mint

$$p_1+p_2+\cdots+p_n+\lambda n^\alpha$$

-szor, végtelenül növekvő n-re egy meghatározott határérték felé tart, bármily két fix pozitiv szám is λ *és* α; *még pedig ha* $\alpha<\frac{1}{2}$, *ezen határérték zérus, ha* $\alpha>\frac{1}{2}$ *ezen határérték az egység,* λ *választásától függetlenül; ha pedig* $\alpha=\frac{1}{2}$, *a határérték* λ *folytonos és növekvő függvénye, a melynek értékkészlete kimeríti a* (0,1) *intervallumot. Ezen valószínűség-limes teljesen hasonló módon fejezhető ki, mint* BERNOULLI*-tételének esetében, a mely tétel éppen az itt előadottnak speciális esete.*[1]

---

[1] A nagy számok törvényének helyzetét a valószínűségszámítás analóg tételei közt legjobban megvilágítja TCHEBYCHEF egy tétele. Oeuvres I. 687—694, a mely egyúttal a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sorozatra tett föltevés értelmét is megadja. V. ö. még Oeuvres I. 17—26 és II. 481—491, a mely mutatja, hogy POISSONénál is nagyobb általánosság érhető el.

BERNOULLI tételében t. i. $p_1=p_2=p_3=\cdots=p_n=\cdots$, míg itt egyáltalán nincs föltéve az sem, hogy p. o. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ arithmetikai közepei egy limes felé tartanak vagy hasonló (mint azt POISSON és reprodukálói némely helyéből gyanítani lehetne). Hogy szélsőséges esetet mondjak, legyen

$$0<k<\tfrac{1}{4},$$

$$r=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-4k},\quad s=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-4k},$$

$$r+s=1,$$

$$r(1-r)=s(1-s)=k.$$

Legyen továbbá:

$p_n=r$, ha n-et tizes számrendszerben fölírva az első jegy 1; $p_n=s$, ha n-et tizes számrendszerben fölírva az első jegy 2, 3, 4, ... vagy 9; akkor

$$\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$$

végtelenül ingadozik, de a sorozatra fennáll a nagy számok törvénye, hiszen

$$\frac{p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n}{n}=k.^{1}$$

Lássunk már most a tétel bizonyításához; POISSONT követve, generátor-függvénynek választjuk a kifejezést

$$(p_1e^{ix}+q_1e^{-ix})(p_2e^{ix}+q_2e^{-ix})\ldots(p_ne^{ix}+q_ne^{-ix})$$

és felhasználjuk azon tényt, hogy

---

[1] Ha $\lim\limits_{n=\infty}\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}=p$ és meg akarjuk határozni a $pn-\lambda\sqrt{n}$, $pn+\lambda\sqrt{n}$ eltérés valószínűségét, megint a LAPLACE-féle integrálalakhoz jutunk, ha fölteszszük, hogy $p-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$ olyan rendben lesz zérussá, mint $n^{-\beta}$, a hol $\beta>\frac{1}{2}$.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\mu ix} e^{-\nu ix}\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\mu-\nu)x\,dx + i\int_{-\pi}^{+\pi} \sin(\mu-\nu)x\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \mu \lessgtr \nu, \\ 2\pi & \mu = \nu. \end{cases}$$

Akkor annak a valószinűsége, hogy a «várt esemény» r-szer az ellenkezője pedig s-szer következzék be, már többször megbeszélt módon így irható

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (p_1 e^{ix}+q_1 e^{-ix})(p_2 e^{ix}+q_2 e^{-ix})\dots(p_n e^{ix}+q_n e^{-ix})\, e^{-(r-s)ix} dx.$$

A kifejezést átalakítjuk; legyen

$$p_\nu e^{ix}+q_\nu e^{-ix} = \cos x + i(p_\nu - q_\nu)\sin x = \rho_\nu e^{i\vartheta_\nu},$$

azaz

$$\rho_\nu^2 = \cos^2 x + (p_\nu-q_\nu)^2 \sin^2 x = 1-4p_\nu q_\nu \sin^2 x,$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_\nu = (p_\nu-q_\nu)\operatorname{tg} x.$$

Az $x=0$ értékhez a $\vartheta_\nu=0$ érték tartozik; ϑ_ν x-nek egyértelmű analytikai függvénye, ha $-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}$; ϑ_ν x-nek páratlan függvénye

$$\vartheta_\nu = (p_\nu-q_\nu)x + \{2(p_\nu-q_\nu)-2(p_\nu-q_\nu)^3\}\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

A $\left(-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right)$ intervallumban (az $\frac{1}{4}$ választása természetesen nem lényeges) a függvény

$$\frac{1}{3!}\,\frac{d^3\vartheta_\nu}{dx^3}$$

korlátos, tehát

$$\vartheta_\nu = (p_\nu-q_\nu)x+\theta M x^3, \qquad -1\leqq\theta\leqq+1$$

a hol M oly nagy fix számnak választható, hogy p_ν választásától is független; minderről meggyőződhetünk, tekintetbe véve az egyenlőségeket

$$\frac{1}{\cos^2\vartheta_\nu}\,\frac{d\vartheta_\nu}{dx} = \frac{p_\nu-q_\nu}{\cos^2 x}$$

$$2\frac{\sin\vartheta_\nu}{\cos^3\vartheta_\nu}\left(\frac{d\vartheta_\nu}{dx}\right)^2+\frac{1}{\cos^2\vartheta_\nu}\frac{d^2\vartheta_\nu}{dx^2}=(p_\nu-q_\nu)\,2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\left(\frac{2}{\cos^2\vartheta_\nu}+\frac{6\sin^2\vartheta_\nu}{\cos^4\vartheta_\nu}\right)\left(\frac{d\vartheta_\nu}{dx}\right)^3+\left(4\frac{\sin\vartheta_\nu}{\cos^3\vartheta_\nu}+\frac{2\sin\vartheta_\nu}{\cos^3\vartheta_\nu}\right)\frac{d\vartheta_\nu}{dx}\frac{d^2\vartheta_\nu}{dx^2}+$$

$$+\frac{1}{\cos^2\vartheta_\nu}\frac{d^3\vartheta_\nu}{dx^3}=(p_\nu-q_\nu)\left\{\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}\right\}$$

ϑ_ν ezen tulajdonságaira később lesz szükségünk; az új jelek bevezetésével annak a valószínűsége, hogy a várt esemény r-szer, ellenkezője s-szer következzék be, így írható

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-(r-s)x)}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-(r-s)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-(r-s)x\right)dx$$

tekintetbe vévén $\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ és $\cos\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-(r-s)x\right)$ függvények páros és a $\sin\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-(r-s)x\right)$ függvény páratlan voltát.

Eddig szórúl-szóra követtük Poissont; képezzük most mindazon eshetőségek valószínűségét, a mikor

$$p_1+p_2+\cdots+p_n-\lambda\sqrt{n}\leqq r\leqq p_1+p_2+\cdots+p_n+\lambda\sqrt{n}.$$

Ekkor tehát, mivel hogy

$$n-p_1-p_2-\cdots-p_n=q_1+q_2+\cdots+q_n,\qquad n-r=s$$

$$q_1+q_2+\cdots+q_n+\lambda\sqrt{n}\geqq s\geqq q_1+q_2+\cdots+q_n-\lambda\sqrt{n}.$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu-q_\nu)-2\lambda\sqrt{n}\leqq r-s\leqq\sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu-q_\nu)+2\lambda\sqrt{n}.$$

Vagyis a $p_1+p_2+\cdots+p_n-\lambda\sqrt{n}$, $p_1+p_2+\cdots+p_n+\lambda\sqrt{n}$ eltérésnek valószínűsége

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\left(\Sigma\cos\left(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-(r-s)\,x\right)\right)dx,$$

a hol a Σ jel alatt $r-s$ végig futja az értékeket

$$\Sigma(p_\nu-q_\nu)-2\lambda\sqrt{n}],\ [\Sigma(p_\nu-q_\nu)-2\lambda\sqrt{n}]+1,\ldots$$
$$[\Sigma(p_\nu-q_\nu)+2\lambda\sqrt{n}].$$

Ismeretes a formula

$$\cos(y+\mu a)+\cos\left(y+(\mu+1)\,a\right)+\cdots+\cos(y+\nu a)=$$
$$=\frac{\cos\left(y+(\mu+\nu)\,\dfrac{a}{2}\right)\sin(\nu-\mu+1)\,\dfrac{a}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}.$$

Ezen formula segélyével a következő kifejezést kapjuk a $p_1+\cdots+p_n-\lambda\sqrt{n}$, $p_1+\cdots+p_n+\lambda\sqrt{n}$ eltérés valószínűségére:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_n}{\sin\dfrac{a}{2}}\cos\left(-\vartheta_1-\vartheta_2-\cdots-\vartheta_n+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{[\Sigma(p_\nu-q_\nu)-2\lambda\sqrt{n}]+[\Sigma(p_\nu-q_\nu)+2\lambda\sqrt{n}]}{2}\,x\right)$$
$$\left.\sin\frac{[\Sigma(p_\nu-q_\nu)+2\lambda\sqrt{n}]-[\Sigma(p_\nu-q_\nu)-2\lambda\sqrt{n}]+1}{2}\,x\right\}dx.$$

Nevezzük ezen kifejezés határértékét, ha n végtelenül növekszik, $v(\lambda)$-nak; meg fogjuk mutatni, hogy $v(\lambda)$ egy jól meghatározott szám és ezzel készen lesz a nagy számok törvényének inkább hosszú, mint nehéz bizonyítása.

1. *Ha $\varphi(n, x)$ minden számbajövő (n, x) értékrendszerre véges korlát alatt marad, akkor*

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\,\varphi(n, x)\,dx=0.$$

Mindenekelőtt, $\rho_1\rho_2\ldots\rho_n$ sohasem negativ, miután egy faktora sem lehet negativ, továbbá

$$\rho_1^2\rho_2^2\ldots\rho_n^2=(1-4p_1q_1\sin^2x)(1-4p_2q_2\sin^2x)\ldots(1-4p_nq_n\sin^2x)$$

$$\leqq e^{-4\frac{p_1q_1+\cdots+p_nq_n}{n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 nx^2}\leqq e^{-2Knx^2},$$

a hol K

$$2\,\frac{p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n}{n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

alsó határa, azon feltételek mellett, hogy

$$n>N,\quad 0\leqq x\leqq\pi-\varepsilon.$$

Ezen alsó határ zérusnál nagyobb, ha N elég nagy, hiszen föl volt téve, hogy

$$\lim_{n=\infty}\frac{p_1q_1+\cdots+p_nq_n}{n}$$

létezik és pozitiv; tehát

$$\left|\int_0^{\pi}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\varphi(n,x)\,dx\right|\leqq\overline{|\varphi(n,x)|}\left|\int_0^{\pi-\varepsilon}e^{-nKx^2}dx+\varepsilon\overline{|\varphi(n,x)}\right.$$

$\overline{|\varphi(n,x)|}$ alatt értve $\varphi(n,x)$ abszolut értékének maximumát; ezen reláczió az előrebocsátott állitást bizonyitja.

Ezen lemma segitségével, hasonló módon, mint az előbbi VIII. fejezetben, megszabadulunk az egész részektől és lesz

$$v(\lambda)=\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos\{\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n-$$

$$-x\,\Sigma(p_n-q_n)\}\frac{\sin 2\lambda\sqrt{n}\,x}{x}dx=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-$$

$$-x\,\Sigma(p_\nu-q_\nu))\frac{\sin 2\lambda\sqrt{n}\,x}{x}dx,$$

a hol a valamely a zérus és π közé eső fix szám, tekintve, hogy $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ együtthatója az (a, π) intervallumban a

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{a}$$

véges korlát alatt marad.

2. *Ha ε egy tetszőleges fix szám a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumban, akkor*

$$\lim_{n=\infty} \int_{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}^{a} \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n \frac{|\sin 2\lambda \sqrt{n}\, x|}{x} dx = 0.$$

Tényleg

$$\int_{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}^{a} \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n \frac{|\sin 2\lambda \sqrt{n}\, x|}{x} dx < 2\lambda \sqrt{n} \int_{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}^{a} e^{-nKx^2} dx \leqq$$

$$\leqq 2\lambda \sqrt{n}\, \pi e^{-Kn^{2\varepsilon}},$$

a mi az előrebocsátott állítást bizonyítja. (K betű értelme ugyanaz, mint az előző 1. pontban.)

Ezen megjegyzés által újból redukálódik a vizsgálandó kiejezés és lesz

$$v(\lambda) = \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}} \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n \cos\left(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n - \right.$$

$$\left. - x\, \Sigma(p_\nu - q_\nu)\right) \frac{\sin 2\lambda \sqrt{n}\, x}{x} dx =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{n^{\varepsilon}} \rho_1\rho_2 \ldots \rho_n \cos\left(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n - \right.$$

$$\left. - y \frac{\Sigma(p_\nu - q_\nu)}{\sqrt{n}}\right) \frac{\sin 2\lambda y}{y} dy,$$

a hol most

$$\rho_\nu = \sqrt{1 - 4p_\nu q_\nu \sin^2 \frac{y}{\sqrt{n}}},$$

$$\vartheta_\nu = \frac{p_\nu - q_\nu}{\sqrt{n}} y + \theta \frac{M}{n^{\frac{3}{2}}} y^3$$

(l. föntebb.)

3. Már most

$$\sin\frac{y}{\sqrt{n}} = \frac{y}{\sqrt{n}} - \theta\frac{1}{6}\frac{y^3}{n^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sin^2\frac{y}{\sqrt{n}} = \frac{y^2}{n} - \theta\frac{\theta}{3}\frac{y^4}{n^2} + \frac{\theta^2}{36}\frac{y^6}{n^3},$$

$$\log\rho_\nu^2 = \log\left\{1 - 4p_\nu q_\nu\left(\frac{y^2}{n} - \frac{\theta}{3}\frac{y^4}{n^2} + \frac{\theta^2}{36}\frac{y^6}{n^3}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{4p_\nu q_\nu}{n}y^2 + \theta\frac{y^4}{n^2}N,$$

a mely egyenlőségekben θ esetről-esetre más mennyiséget jelenthet, de mindig csak egy olyant, a mely a $(-1, +1)$ intervallumból van véve, míg N egy bizonyos, y-tól, ν-től független fix pozitiv szám. Tehát

$$\log\rho_1\rho_2\cdots\rho_n = -\frac{2(p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n)}{n}y^2 + \frac{y^4}{n}\frac{\theta N}{2}.$$

Már most látható, hogy ha csak ε elég kicsiny,

$$0 = \lim_{n=\infty}\left\{v(\lambda) - \frac{2}{\pi}\int_0^{n^\varepsilon} e^{-\frac{2(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)}{n}y^2}\cos\left(\vartheta_1+\cdots+\vartheta_n - \frac{y}{\sqrt{n}}\Sigma p_\nu q_\nu\right)\frac{\sin 2\lambda y}{y}dy\right\}.$$

Mert határértéke kisebb mint a mennyiségé:

$$\frac{4\lambda}{\pi}\left(e^{N\frac{n^{4\varepsilon}}{n}} - 1\right)\int_0^{n^\varepsilon} e^{-\frac{2(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)}{n}y^2}dy.$$

Ez meglévén, látjuk, hogy hasonló módon

$$\lim_{n=\infty}\left\{v(\lambda) - \frac{2}{\pi}\int_0^{n^\varepsilon} e^{-\frac{2(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)}{n}y^2}\frac{\sin 2\lambda y}{y}dy\right\} = 0.$$

Tényleg, elegendő figyelembe venni, hogy

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\cdots+\vartheta_n-\frac{y}{\sqrt{n}}\Sigma(p_\nu-q_\nu)=\frac{\theta n M}{n^{\frac{3}{2}}}y^3.$$

Végül legyen

$$\lim_{n=\infty}\frac{2(p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n)}{n}=h^2,$$

akkor látjuk, hogy

$$\left|\int\limits_0^{n^\varepsilon} e^{-h^2y^2}\frac{\sin 2\lambda y}{y}dy-\int\limits_0^{n^\varepsilon} e^{-\frac{2(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)y^2}{n}}\frac{\sin 2\lambda y}{y}dy\right|<$$

$$<2\lambda\int\limits_0^{\infty} e^{-h^2y^2}\left|e^{\left(h^2-\frac{2(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)}{n}\right)y^2}-1\right|dy.$$

Ezen utolsó integrál bizonnyal konvergens, mihelyt

$$\left|h^2-\frac{2p_1q_1+\cdots+p_nq_n}{n}\right|<h^2,$$

a mi bizonynyal bekövetkezik elég nagy n-nél, mert hiszen a baloldal határértéke zérus; azonkívül pedig a végtelen integrál határértéke is zérus, mint az a határozott integrálok elemeiben ismertetett tételekből folyik.

Mindent összevéve tehát

$$v(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-h^2y^2}\frac{\sin 2\lambda y}{y}dy=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-y^2}\frac{\sin\frac{2\lambda}{h}y}{y}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{h}} e^{-x^2}dx,$$

a hol tehát

$$h=\sqrt{\lim_{n=\infty}\frac{2(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)}{n}}.$$

Így hangzik Poisson bizonyítása, ha az általa jelzett vagy talán csak sejtett megbecsüléseket szigorúan keresztülviszszük; remélem, ezen formájában már nem esik Bertrand szigorú itélete alá.

X.[1]

Feladat. Ha mi a $(-h, +h)$ intervallumból kiveszünk n számot (esetleg ugyanazon szám többször is előfordulhat), mi annak a valószínűsége, hogy ezen n szám összege $-x$ és $+x$ közé lesz zárva?

A geometriai valószínűség definicziója szerint, ezen valószínűség két halmaz mértékének a hányadosa; a lehetséges eseteket képviselő halmaz a következő egyenlőtlenségek által van elhatárolva

$$-h \leqq x_1 \leqq +h, \quad -h \leqq x_2 \leqq +h, \ldots \quad -h \leqq x_n \leqq +h,$$

míg a kedvező eseteket ezenkívül a következő egyenlőtlenség szoritja meg

$$-x \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq +x.$$

A két halmaz mértékének hányadosa, a II. fejezet szerint

$$\frac{\dfrac{2^{n+1}}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin h\mu}{\mu}\right)^n \frac{\sin x\mu}{\mu}\, d\mu}{(2h)^n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin h\mu}{h\mu}\right)^n \frac{\sin x\mu}{\mu}\, d\mu.$$

Ha mi p. o. egy hosszat n darabra osztva mérünk meg és mindegyik darab megmérésénél egyformán valószínű minden hiba, a melynek abszolut értéke nem haladja meg h-t, míg olyan hibák, a melyek abszolut értéke meghaladja h-t, kizártnak tekinthetők, akkor a fölirt kifejezés annak a valószínűsége, hogy az egész hossz mérésénél elkövetett hiba abszolut értékben ne haladja meg x-et.

Bessel és Hagen úgy fogják föl a tényleges mérésnél el-

---

[1] V. ö. Sommerfeld l. c.

követett hibákat, hogy azok igen számos és igen kicsiny egyenként kontrollálhatatlan *elemi hibá*ból tevődnek össze; ha mi p. o. n elemi hibát veszünk föl, a melyek mindegyikére álljon fönn az egyszerű, diszkontinuus hibatörvény, a mely szerint h-nál abszolut értékben kisebb hibák egyformán valószínűek, míg h-nál abszolute nagyobb hibák ki vannak zárva, akkor a fölírt kifejezés annak a valószínűsége, hogy az n elemi hibából eredő megfigyelhető hiba $-x$ és $+x$ közé legyen zárva.

Ha az elemi hibák száma minden határon túl növekedik, a hibák határának, h-nak, végtelenül kell fogynia, hogy véges eredő hiba valószinűsége a zérustól különböző legyen; n elemi hibának minden lehetséges kombináczióját egy bizonyos n dimenziós koczka állítja elő; úgy találjuk, hogy az elemi hibáknak olyan módon kell fogyniok, hogy ezen koczka diagonálisának hossza

$$2h\sqrt{n}$$

minden dimenzióban (bármily számú elemi hibánál) ugyanakkora legyen. Más szóval, h olyan rendben válik végtelen kicsinynyé, mint $\frac{1}{\sqrt{n}}$; az arányossági faktort czélszerűen választva, legyen

$$h = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{n}},$$

a hol k egy bizonyos konstans.

Valóban vizsgálnunk kell határértékét az integrálnak:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin h\mu}{h\mu}\right)^n \frac{\sin x\mu}{\mu}\,d\mu =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^n \frac{\sin \mu\sqrt{\frac{n}{6}}\,2kx}{\mu}\,d\mu.$$

Könnyen látható, hogy az integrált szétrakva a schema szerint

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

a második rész határértéke zérus; hiszen kisebb, mint

$$\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\mu}{\mu^n} = \frac{1}{n+1}\,\frac{2}{\pi}.$$

A

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^n \frac{\sin\mu\sqrt{\frac{n}{6}}\,2kx}{\mu}\,d\mu$$

határérték vizsgálata ugyanolyan módon történik, mint a

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\mu)^n \frac{\sin \mu 4\lambda \sqrt{n}}{\mu}\,d\mu$$

határértéké, a melyet már elintéztünk[1] (VIII.) T. i. a két hatványsor

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

és

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

az $x=0$ pont környezetében igen hasonló módon viselkedik azonkívül megjegyezhetjük az analógiát, a mely a két integrál által mért n dimenziós térfogatok közt fennáll. (L. II. és VIII.)

A vizsgálat eredménye, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\mu}{\mu}\right)^n \frac{\sin\mu\sqrt{\frac{n}{6}}\,2kx}{\mu}\,d\mu =$$

$$= \lim \frac{2}{\pi}\int_0^{n^\varepsilon} e^{-\frac{n}{6}\left(\nu\sqrt{\frac{6}{n}}\right)^2} \frac{\sin 2kx\nu}{\nu}\,d\nu =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu^2}\frac{\sin 2kx\nu}{\nu}\,d\nu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{kx} e^{-y^2}\,dy.$$

[1] V. ö. MAURER, l. c. Azonkívül LAPLACE Théorie anal. des probabilités 169. o. és köv. (III. kiadás.)

Annak a valószínűsége tehát, hogy a végtelen sok elemi hibából eredő véges hiba x és $x+dx$ közé essék

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2} dx.$$

Ez a Gauss-féle hibatörvény.

Ezen fejezet tartalma Sommerfeld[1] egy dolgozatából van véve, a melyben tudomásom szerint először van explicite és módszeresen vizsgálva egy geometriai valószínűség határértéke, ha a dimenziók száma a végtelenbe nő.

Ilyen «végtelen sok dimenziós geometriai valószinűségek» egy új alkalmazásáról fog szólni a következő fejezet.

XI.

1. Feladat. *Ha mindazon pozitivtagú sorokból, a melyek azon tulajdonsággal bírnak, hogy a tagjaik négyzeteiből alkotott sor konvergál és összegül egy az egységnél nem nagyobb számot ad, ha mindezen sorokból mondom «találomra» kiragadunk egyet, mi a valószínűsége annak, hogy ez a sor maga konvergáljon és összege ne legyen nagyobb, mint az egység?*

Definiczió. *A keresett valószínűség alatt értem a határértékét azon eshetőség valószínűségének, hogy n pozitiv szám összege ne legyen nagyobb mint az egység, ha biztos, hogy négyzetösszegük nem nagyobb mint az egység, végtelenül növekvő n-re, föltéve, hogy ezen határérték létezik.*

Azon eshetőség valószínűsége, hogy n pozitiv szám összege ne legyen nagyobb mint az egység, ha biztos, hogy négyzetösszegük nem nagyobb mint az egység, egy ú. n. geometriai valószínűség és a valószínűségszámítás elemei szerint így számítandó ki: legyen

$$P_n = \int\int \cdots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

[1] l. c.

az integrált kiterjesztve egy bizonyos (P_n) halmazra, a mely definiálva van az egyenlőtlenségek által

$$0 \leqq x_1,\ 0 \leqq x_2, \ldots, 0 \leqq x_n,\quad x_1+x_2+\cdots+x_n \leqq 1.$$

Továbbá legyen

$$Q_n = \int\int\cdots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

kiterjesztve a (Q_n) halmazra, a melyet elhatárolnak az egyenlőtlenségek

$$0 \leqq x_1,\ 0 \leqq x_2, \ldots, 0 \leqq x_n,\quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqq 1,$$

akkor a keresett n dimenziós valószínűség $\frac{P_n}{Q_n}$.

A sorokra vonatkozó valószinűségszámitási kérdés megoldása tehát a szám $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n}$, határértéke egy sorozatnak, a melynek első tagjai

$\frac{P_1}{Q_1}$ = egy vonaldarab viszonya önönmagához;

$\frac{P_2}{Q_2}$ = egy négyzet viszonya a körülírt körhöz;

$\frac{P_3}{Q_3}$ = egy oktaëder viszonya a körülírt gömbhöz; stb.

Azt hiszem a valószinűség ezen definicziója nem lesz idegenszerű manapság, a mikor sorokra vonatkozó nem egy kérdést már úgy tárgyalnak, mint egy végtelen sok dimenziós geometria kérdéseit.

Marad még megmutatni, hogy esetünkben létezik egy valószinűség, azaz, hogy a mondott határérték létezik. A kiszámitandó tört számlálója;

$$P_n = \frac{1}{n!} \quad \text{(V. ö. III., VI. 5, VI. 6.)}$$

A nevező értéke szintén jól ismert;[1] kiszámítására a követ-

[1] L. KRONECKER: Vorl. über die Theorie der einf. und vielf. Integrale. (Netto) 265. o.

kező utat is választhatjuk: ha az n dimenziós egységsugarú gömb felülete $2^n \Omega_n$, akkor

$$Q_n = \left(\frac{r^n}{n} \Omega_n\right)_{r=1} = \frac{1}{n} \Omega_n$$

Ω_n-et azonban kiszámithatjuk így:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^n = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \Omega_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr.$$

Ugyanis n dimenziós polárkoordinátákban a «térfogatelem»

$$r^{n-1} d\Omega_n dr$$

és az elvégzett $n-1$ integráczió az egységsugarú gömb $\frac{1}{2^n}$ részére volt kiterjesztve. Tehát

$$\Omega_n = \frac{\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^n}{\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr} = \frac{\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1} e^{-y} dy\right)^n}{\frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy} = \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

és ilyen módon

$$Q_n = \frac{\Omega_n}{n} = \frac{1}{2^n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2\nu}} \dfrac{\pi^{\nu}}{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots\nu\,.\,1\,\Gamma(1)} & n = 2\nu \\[2ex] \dfrac{1}{2^{2\nu+1}} \dfrac{\pi^{\nu+\frac{1}{2}}}{\frac{2\nu+1}{2}\cdot\frac{2\nu-1}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & n = 2\nu+1 \end{cases}$$

A keresett valószínűség lehet határértéke a hányadosnak:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{1.\,3.\,5.\,\ldots\,2\nu-3.\;2\nu-1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\nu}} & n=2\nu\\[2ex] \dfrac{1}{2.\,4.\,6.\,\ldots\,2\nu-2.\;\;2\nu\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\nu}} & n=2\nu+1\end{cases}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_n}{Q_n}=0.$$

Általában: *annak a valószínűsége, hogy egy konvergens négyzetösszegű pozitiv tagú sor, a melynek négyzetösszege nem nagyobb mint N^2, maga is konvergens legyen és az összege ne legyen nagyobb mint M, annak a valószínűsége zérus* (vagy végtelen kicsiny, ha ezen kifejezést szeretjük használni.) Mivelhogy bármi módon is választjuk M és N számokat, a keresett valószínűség nem nagyobb, mint a határértéke a következő hányadosnak:

$$\frac{M^nP_n}{N^nQ_n}=\begin{cases}\dfrac{\frac{2M^2}{\pi N^2}}{1}\cdot\dfrac{\frac{2M^2}{\pi N^2}}{3}\cdots\dfrac{\frac{2M^2}{\pi N^2}}{2\nu-1} & n=2\nu\\[2ex] \dfrac{M}{N}\cdot\dfrac{\frac{2M^2}{\pi N^2}}{2}\cdot\dfrac{\frac{2M^2}{\pi N^2}}{4}\cdots\dfrac{\frac{2M^2}{\pi N^2}}{2\nu} & n=2\nu+1\end{cases}$$

Mivel pedig ez *minden M-re* és *minden N-re* így van, szabad magunkat esetleg így is kifejeznünk: ha egy pozitivtagú sorról csak azt tudjuk, hogy tagjainak négyzetösszege konvergens, még végtelenül valószinűtlen, hogy a sor maga is konvergens.

2. Hogy a valószínűség itt adott definicziója jó-e vagy sem, az bizonyitásnak vagy czáfolatnak tárgyát nem képezheti; ellenőrzésére az egyetlen út, minél több esetben megvizsgálni, hogy a definicziók szerint kiszámitott számértékek mennyire fejezik ki önkéntelenül kialakult várakozásunkat.

Feladat. *Mi a valószínűsége annak, hogy a részletösszegei egy reális tagú sornak, a melynek tagjai abszolute nem nagyobbak,* *mint az egység, végesek maradjanak, még pedig abszolut értékben* $\leqq r$?

Definiczió. *Ezen valószínűség alatt értjük az*

$$-1\leqq x_1\leqq +1,\ -1\leqq x_2\leqq +1,\dots\ -1\leqq x_n\leqq +1,$$

$$-r\leqq x_1+x_2+\cdots+x_n\leqq +r$$

egyenlőtlenségek által elhatárolt halmaz mértékének viszonyát azon halmaz mértékéhez, a melyet a következő n *egyenlőtlenség definiál*

$$-1\leqq x_1\leqq +1,\ -1\leqq x_2\leqq +1,\dots\ -1\leqq x_n\leqq +1$$

végtelenül növekedő n *esetén.*

A nevezőben álló n dimenziós térfogat nyilván

$$2^n$$

míg a számlálóban álló térfogat a dolgozat első fejezeteinek eredményei szerint

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin rx}{x}\,dx.$$

A keresett valószínűség tehát

$$\lim_{n=\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin rx}{x}\,dx = 0,$$

a mint arról könnyen meggyőződhetünk, az integrált szétrakva a

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

schema szerint. (V. ö. VIII, X.)

Általában, *ha* $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n+\cdots$ *egy reális tagú végtelen sor, a melynek tagjai* -1 *és* $+1$ *között variálhatnak és* λ *egy fix pozitiv szam, akkor végtelenül valószínű, hogy ezen hányados:*

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n^\alpha}$$

abszolut értékben ezen fix λ alatt marad, ha csak $a>\frac{1}{2}$; végtelenül valószínütlen, hogy ugyanezen hányados λ alatt maradjon, ha $a<\frac{1}{2}$, mindkét esetben függetlenül λ választásától; véges valószínűséggel csak az $a=\frac{1}{2}$ exponens (az ordo $n^{\frac{1}{2}}$) *bír.* T. i. a valószínűség

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin \lambda n^a x}{x}\, dx = \begin{cases} 0 & a<\frac{1}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{\lambda\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{-x^2} dx & a=\frac{1}{2} \\ 1 & a>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ezen eredmény hasonló a BERNOULLI törvényéhez és bizonyítása sem eltérő (l. VIII., X.)

3. A következő példáért LUKÁCS FERENCZ úrnak tartozom köszönettel.

Ha $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ reális számok véges határérték felé konvergálnak, akkor

1. megadható két oly a, b szám, hogy

$$a \leqq x_i \leqq b, \quad i=1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

azaz a sorozat korlátos.

2. A végtelen sok pozitiv számnak:

$$|a_i - a_k| \quad i, k = N, N+1, N+2, \ldots$$

fölső korlátja legyen ε_N; akkor $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots$ egy soha sem növekvő sorozat, a mely a zérus felé tart.

Ha lehetséges eseteknek tekintem a koczka

$$a \leqq x_i \leqq b \quad i=1, 2, 3, \ldots, n$$

összes pontjait, akkor annak a valószínűségét, hogy valamely $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ pontra fennálljanak az egyenlőtlenségek

$$\begin{array}{r} |x_1-x_2|,\ |x_1-x_3|,\ |x_1-x_4|, \ldots, |x_1-x_n| \leqq \varepsilon_1 \\ |x_2-x_3|,\ |x_2-x_4|, \ldots, |x_2-x_n| \leqq \varepsilon_2 \\ |x_3-x_4|, \ldots, |x_3-x_n| \leqq \varepsilon_3 \\ |x_{n-1}-x_n| \leqq \varepsilon_{n-1} \end{array}$$

két integrál hányadosa méri, t. i.

$$\frac{\int\int_{(H_n)}\cdots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{(b-a)^n},$$

a hol tehát (H_n) halmazt az egyenlőtlenségek definiálják:

$$a \leq x_i \leq b, \quad |x_i - x_k| \leq \varepsilon_{\text{minor}\,(i,k)} \quad i, k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Vizsgáljuk ezen valószínűség határértékét végtelen n-re. (H_n) halmaz, valamint mértéke is csak nagyobbodhatik, ha a megszorító egyenlőtlenségek közül néhányat elhagyunk.

$$\frac{\int\int_{(H_n)}\cdots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{(b-a)^n} \leq \frac{\int_a^b dx_1 \int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1+\varepsilon_1} dx_2 \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2+\varepsilon_2} dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}-\varepsilon_{n-1}}^{x_{n-1}+\varepsilon_{n-1}} dx_n}{(b-a)^n} =$$

$$= \frac{b-a}{b-a} \cdot \frac{2\varepsilon_1}{b-a} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{b-a} \cdots \frac{2\varepsilon_{n-1}}{b-a}.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\int\int_{(H_n)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{(b-a)^n} = 0.$$

Ezen eredmény igaz, a-ra, b-re és az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ sorozatra tett minden speciális föltevés nélkül; hasonlóan mint az 1. példában, itt is mondhatjuk tehát, hogy *annak valószínűsége, hogy valamely találomra fölírt sorozat véges meghatározott határérték felé konvergáljon végtelen kicsiny.*

4. Ha új konvenciókat teszünk, megoldhatunk az eddigiektől kissé különböző jellegű kérdéseket is.

Feladat. *Vegyük szemügyre mindazon függvények halmazát, a melyek a* (0, 1) *intervallumban vannak definiálva és a melyek értékkészlete* 0 *és* 1 *között foglaltatik; ha ezen függvények közül egyet találomra kiragadunk, mi annak a valószínűsége, hogy ezen találomra kiragadott függvény integrálja ne legyen nagyobb mint* λ?

A «függvény» szóhoz tulajdonképen még oda kellett volna függesztenünk a jelzőt «RIEMANN szerint integrábilis»; mert mi az integrálás menetét következőképpen gondoljuk: legyen

$$f(x) = f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n,$$

ha

$$x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$$

és képezzük a közelítő értéket:

$$\frac{f_1+f_2+\cdots+f_n}{n}.$$

Ha $f(x)$ egy kedvező esetet reprezentál, akkor

$$\frac{f_1+f_2+\cdots+f_n}{n} < \lambda+\varepsilon_n,$$

a hol ε_n végtelenül növekvő n-nel zérushoz konvergál.

Így jutunk a különben teljesen önkényes definiczióhoz:

A keresett valószínűség alatt értjük a

$$0 \leqq f_1 \leqq 1,\ 0 \leqq f_2 \leqq 1, \ldots\ 0 \leqq f_n \leqq 1,$$
$$f_1+f_2+\cdots+f_n \leqq \lambda n$$

egyenlőtlenségek által definiált halmaz mértékének viszonyát, azon halmaz mértékéhez, a melyet ezen egyenlőtlenségek definiálnak:

$$0 \leqq f_1 \leqq 1,\ 0 \leqq f_2 \leqq 1, \ldots\ 0 \leqq f_n \leqq 1$$

végtelenül növekedő n esetén.

(Minden «lehetséges» függvénynek ezen halmaz egy pontja és ezen halmaz minden pontjának végtelen sok «lehetséges» függvény felel meg.)

A vizsgálandó viszony nevezője az egység; a számláló értékével már találkoztunk egyszer, a MOIVRE-LAPLACE probléma megoldásánál (az akkori $r = \lambda n$); az integrált kiszámítottuk III-ban; [1] értéke

[1] V. ö. még VI. 7.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin nx}{x}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin(2\lambda-1)nx}{x}\,dx$$

Ezen kifejezés határértéke, ha $\lim n = \infty$, azaz definicziónk szerint annak a valószinűsége, hogy a mondott függvényosztály egy individuumának integrálja 0 és λ közé legyen zárva =

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } 2\lambda - 1 < 0, \text{ azaz, ha } \lambda < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{« } 2\lambda - 1 = 0, \text{ « « } \lambda = \frac{1}{2} \\ 1, & \text{« } 2\lambda - 1 > 0, \text{ « « } \lambda > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ezen kissé paradox eredmény azt mondja, hogy végtelenül probábilis, hogy valamely szóban forgó függvény integráljának értéke $\frac{1}{2}$ legyen. (Másképpen, hogy igen probábilis, hogy a (0, 1) intervallumból találomra kivett igen sok szám arithmetikai közepe $\frac{1}{2}$ legyen.)

XII.

1. Megjegyzés. Laplace problémájában (I) határértékét kerestük egy diszkontinuus (közönséges) valószinűségnek, midőn a golyók (eshetőségek) száma korlátlanul növekedett és kitünt, hogy a határérték egy *geometriai valószínüség*; tulajdonképpen minden geometriai valószinűséget úgy foghatunk föl, mint diszkontinuus valószinűségek határértékét és ezen tény mint egy hidat ver a diszkontinuus valószinűségszámitás és a geometriai valószinűségek számitása közt. Megkisértem ez alkalomból megfogalmazni a ma már jobbára kialakult véleményt[1] a geometriai valószinűségek nemrég még annyira vitatott kérdéséről.

A diszkontinuus valószínűség*számítás* is csak akkor láthat dolgához, a mikor már el van intézve azon arithmetikai és geometriai axiómák alapján nyilván eldönthetetlen kérdés, hogy mely eshetőségek tekintendők egyformán valószinűeknek. Az «egyformán valószínű eshetőségek» fogalma bizonyos nehézségekkel jár (a mely nehézségeket taglalni nem ezen helyre

[1] V. ö. p. o. Borel és Czuber tankönyveit.

való) és úgy látszik, hogy ezen nehézségek növekednek, midőn «geometriai valószínűségekre», végesszámú eshetőségek helyett eshetőségek egy kontinuumára térünk át; a nehézség azon részéről kell itt tehát szólnom, a mely az esélyek kontinuusan végtelen sok voltából származik.

Egyszerűség okáért maradjunk egy dimenzióban; legyen A egy végtelen sok módosulatban megvalósulható esemény[1] és legyenek különböző módosulatai egy-egyértelműen és folytonosan leképezve a $(0, 1)$ intervallum pontjaira; azon módosulatot, a mely x pontnak van megfeleltetve, $A(x)$-nek fogom röviden nevezni. Ezen adott leképezéstől még végtelen sok különbözőt választhatunk a következő módon (és ha A esemény módosulatainak sokasága olyan, hogy *összefüggése* szerint nem képezhető le egy körre — egy zárt görbére — akkor minden egy-egyértelmű és folytonos leképezést megkapunk ezen a módon): legyen $\varphi(x)$ x-nek egyértelmű és egyértelműen megfordítható folytonos függvénye, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, a mely föltételekből következik, hogy $\varphi(x)$ értékkészlete kimeríti a $(0, 1)$ intervallumot és hogy $\varphi(x)$ monotón növekvő; akkor $A(x)$ módosulatát A eseménynek most újonnan leképezem a $\varphi(x)$ pontba.

A geometriai valószínűség definicziója szerint annak valószínűsége, hogy A esemény valamely oly módosulatban következzék be, a mely $A(x_1)$ és $A(x_2)$ közé esik, x_2-x_1; de épp úgy lehetne még egyenlőre $\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$, a mely kifejezés minden értéket fölvehet, a mely nagyobb mint zérus és kisebb mint az egység; ezen tényt állítja elénk csinosan BERTRAND paradoxonja. Ezen tény pedig csak azt teszi, hogy a definiczió egyenlőre nem teljes, mert hiszen nem határozott; de nyilvánvaló, hogy nem is lehet teljes, mert a végtelen sok lehetséges leképezés közti választásunkat nem irányította eddig semminemű valószínűségi meggyőződés. A szóban forgó geometriai

---

[1] P. o. egy roulette golyójának súlypontja végtelen sok módon helyezkedhetik el a vályúban; egy passage-műszer köralakú látóterében valamely átvonuló állócsillag végtelen sok különböző húron haladhat végig stb.

valószínűség teljesen, egyértelműen, kétségtelenül definiálva csak úgy lesz, ha találunk egy leképezést, a mely valószínűségi meggyőződéseinknek minden tekintetben *megfelelő*.

Legyen adva tehát valamely leképezése A esemény különböző lehetséges módosulatainak a $(0, 1)$ intervallumra; ezen módosulatoknak (a bekövetkezhető eshetőségeknek) két osztályát vizsgálom; azok a melyek a $(0, \frac{1}{2})$ intervallum pontjainak felelnek meg, tartoznak az egyik osztályba, azok, a melyek az $(\frac{1}{2}, 1)$ intervallum pontjainak felelnek meg, tartoznak a másik osztályba (csak $A(\frac{1}{2})$ tartozik mindkét osztályba). Fölteszem a kérdést: épp olyan valószínű-e, hogy az első osztály eshetőségei közül következik-e be valamelyik, mint az, hogy a másik osztály eshetőségei közül következzék-e be valamelyik?

Ha e kérdésre nem tudunk feleletet adni, a vizsgált esemény valószínűségéről nincs kielégítő fogalmunk, tehát a dolog mathematikai tárgyalásra nem alkalmas.

Ha a kérdésre azt a feleletet kell adnunk, hogy *nem*, akkor a leképezés a valószínűségszámítás kivánalmainak *meg nem felelő*. Ha pedig a felelet igenlő volt, beosztjuk a $(0, 1)$ intervallumot $2, 3, 4, \ldots, n$ részre és hasonló módon kérdezősködünk tovább; ha a kérdésre valahol nem tudunk megfelelni, a szóbanforgó esemény valószínűségi viszonyairól alkotott fogalmunk hiányos; ha a kérdésre tagadó választ kell adnunk valahol, akkor a választott leképezés elvetendő, ha pedig sem az egyik, sem a másik nem következik be, akkor a választott leképezés *megfelelő*.

Hogy egy *megfelelő* leképezés *létezik*, azt természetesen in abstracto bizonyitani értelmetlen; tegyük föl ellenben, hogy *egy zérustól különböző intervallumra leképezhető eshetőség halmaz valószínűsége mindig zérustól különböző*,[1] akkor könnyű bizonyitani, hogy a mennyiben egy *megfelelő* leképezés lehetséges, csak *egyetlenegy* lehetséges, mert hiszen ha egy foly-

[1] Ha ez nem volna így, bizonyos eshetőségek *kizárásával* visszaesnék a hypothesisre.

tonos függvény minden raczionális helyen meg van határozva, akkor teljesen meg van határozva.

És ezzel el van intézve BERTRAND paradoxonja teljesen; ha egy geometriai valószínűséget kiszámítva több különböző eredményhez jutunk, az csak a geometriai valószínűség definicziójának nem teljes figyelembevételéből, vagy pedig az illető esemény valószínűségéről alkotott fogalmunk hiányos voltából eredhet, de sohasem eredhet onnan, mintha a számításmód, a geometriai valószínűség fogalma *in abstracto* zavaros volna. Persze, hogy honnan veszünk események valószínűségéről alkotott hiánytalan fogalmakat, az elintézetlen marad, de ezen kérdés nem is speczialisan a geometriai valószínűségekre vonatkozik.

Mindenkinek, a ki meggyőződéssel óhajtja követni jelen dolgozat azon fejezeteit, a melyekben geometriai valószínűségekről van szó, meg kell győződve lennie arról p. o., hogy éppen olyan valószínű, hogy egy szám $\frac{3}{7}$ és $\frac{4}{7}$ közé esik, mint hogy $\frac{5}{7}$ és $\frac{6}{7}$ közé essék.

Ha mi egy esemény válószínűségéről megfigyelések alapján összeállitott tabellából tájékozódtunk, a beosztás csak egy bizonyos pontosságig folytatandó, de különben ugyanolyan meggondolások érvényesek.

2. Megjegyzés. A XI. fejezet példáin ismertetett definiczió általánosságban ilyesféleképpen fogalmazható meg: «Ha egy valószínűségről van szó, a mely $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ sorozatra vonatkozik és a lehetséges esetek föltétele az $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ pontot az n dimenziós tér valamely halmazára szorítja, míg a kedvező esetek föltétele által $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont az éppen említett halmaz egy részhalmazába van zárva, akkor megalkotandó ezen két halmaz mértékeinek viszonya minden dimenziókban és az így kapott sorozat határértékét, ha létezik nevezzük a keresett valószínűségnek.»

Ezen definiczió szerint tehát lehetnek $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sorozatnak olyan tulajdonságai, a melyeknek nincs *határozott valószínűsége*. De az is megeshetik, hogy a definiczió egyáltalán nem alkalmazható, t. i. midőn valamelyik föltétel nem szorítja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontot az n dimenziós tér valamely határozott halmazára. Ha p. o. a kedvező esetek föltétele ez volna: «Legyen az

$$1+x_1z+x_2z^2+\cdots+x_nz^n+\cdots$$

hatványsor az egységkörben konvergens...», akkor a föltétel

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$$

nem szakít ki a $2n$ dimenziós térből (most komplex x_n-ről van szó) egy határozott halmazt, tehát p. o. az a kérdés, hogy valószínű-e, hogy egy az egységkörben konvergens hatványsorra nézve az egységkör természetes határ-e, vagy sem, jelen definiczió szerint *nem* oldható meg.

Midőn jelen definicziót kiterjesztve olyant kisértünk meg keresni, a mely szerint az említett feladat is megoldható lenne, nehézségekbe ütközünk, úgy hogy én kételkedem, hogy lesz-e valaha is rendelhető a szóbanforgó valószínűség mellé egy határozott számérték.

Így p. o. igen meggondolandó, hogy ki szabad-e terjeszteni végtelen sok dimenzióra a kijelentést: «valószínütlen, hogy mennyiségek közt egy egyenlet álljon fenn», a mint azt hallgatagon, éppen a tárgyalt kérdéssel kapcsolatban, többször tették. Három dimenzióban, p. o. a kijelentés azt teszi, hogy a tér egy pontja egy determinált felületen feküdjék; tényleg, a felület pontjainak háromdimenziós mértéke zérus. Ellenben végtelen sok dimenzióban valahogy egészen mást tesz. P. o., legyenek $a, b, c, \ldots$ pozitiv számok, akkor az egyenlet

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\cdots=1$$

pontosan azt teszi, hogy a pozitivtagú sor

$$a+b+c+\cdots$$

divergens, tekintve, hogy mindig fennáll és csak akkor, ha a mondott sor divergens, hogy pedig egy pozitivtagú sor divergens legyen, azt nem lehetne valószínűtlennek mondani.[1] Azt hiszem Poincaré mutatta meg leginkább, mennyire mást jelent egy reláczió végtelen sok mennyiség, mint véges sok mennyiség közt, kimutatva, hogy végtelen sok *egyenlet* bizonyos esetben végtelen sok *egyenlőtlenséggel* teljesen pótolható.

Végűl köszönetet mondok Bauer Mihály műegyetemi m. tanár úrnak, a ki szives útbaigazításaival jelen dolgozat elkészitésében támogatott.

Pólya György.

[1] XI. 2, 4.

AZ ENERGIA MEGMARADÁSÁNAK ELVE ÉS AZ EJTŐGÉP MOZGÁSTÜNEMÉNYEI.

1. Általánosított törvények, mint a fizika ismeretrendező elvei.

Fizikai tudásunk anyagát tudvalevőleg tapasztalatunk *tényei* alkotják. A mindennapi életben a jelenségeknek egész sorozatát figyeljük meg a legtöbb esetben akaratlanul, a mennyiben érzéki benyomásaink elől általában nem lehet elzárkóznunk. A mindennapi életben más irányban lekötött figyelmünk miatt azonban az esetleges érzéki benyomások nem jutnak *kellő* világossággal tudatunkba s így a tudományos megfigyelés szempontjából ránk nézve elvesznek.

Vannak azonban a mindennapi életben oly intenzív benyomások is, melyeknek tudatositása elől lehetetlen elzárkóznunk. A nap fölkél és lenyugszik, a csillagok ragyognak, az ívlámpa világít, a tűz éget és így tovább. Az ily módon szinte *akaratlanul* nyert megfigyelések a mindennapi élet berendezése szempontjából teljesen elegendők, tudományos értékkel azonban éppen esetleges és *rendezetlen* voltuk miatt nem birnak.

A tudományos megfigyelés a mindennapi élet tapasztalataitól éppen *tervszerűsége* és tudatossága által különbözik, a mennyiben a változatos jelenségek nagy halmazából igyekezünk *egyeseket* kiválasztani és lehetőleg *csakis* ezeket megfigyelni. Minthogy ezáltal kutatásaink területét erősen megszűkítjük, ennélfogva a fokozott *figyelem* révén benyomásaink kellő intenzitással jutnak tudatunkba. Tudományos megfigyeléseink *tényeit* az így nyert *világos* képzetcsoportok alkotják.

A tudományos kutatások folyamán ily módon a tapasztalati tényeknek oly nagy sokasága gyűlik össze, hogy az *áttekintés* valamely ismeretrendező eljárás nélkül *lehetetlenné* válik és a sok fától nem látnók az erdőt!

A legegyszerűbb ilyen ismeretrendező eljárás az általánosításnak az a módja, mellyel a jelenségek meghatározott számú csoportjára *érvényesnek* felismert *törvényszerűség* érvényességi körét kiterjesztjük meglévő tapasztalataink határain túl is. Ezen eljárásnál tehát a törvény érvényessége *legalább is* egy jelenségcsoportra kétségtelenül *bizonyos* és az általánosítás nem a törvény *alakjára*, hanem érvényességi *körére* vonatkozik.

A fizika fejlődésében tehát a speciális kutatásokat mindig nagy *általánosítások* fogják követni s így születnek meg azok az ismeret anyagunk *rendezésében* kiinduló ponttul szolgáló és általános *elvekké* tett törvények, melyek az *induktiv* uton szerzett tételek *dedukczióját* lehetővé teszik.

A dedukció uralma a fizika ismeretanyagának rendezésében egészen természetes sőt szinte szükségszerű. A fizika ugyanis a jelenségek részei között mindig *mennyiségi* kapcsolatokat keres, már pedig a functionális viszonyok kifejezésére a matematika nyelve a legalkalmasabb. Tökéletesen *érthető* tehát hogy és *kutatásaiban* egyébként *induktív* tudomány saját ismeretanyagának *rendezésében* a segédeszközül használt matematikának módszerét, a *dedukciót* fogja használni.

A fizikának ilyen dedukcióra szolgáló elvei tehát legtöbbször *általánosított törvények*. *Törvények* azért, mert *igazságuk* az indukczió alapját képező *tényekre* vonatkozólag *bizonyos* és *általánosak* azért, mert érvényességi körüket *kiterjesztettük*. Ezen megfontolások után kitűnik azon követelés *naivsága*, mely általános ismeretrendező elvül szolgáló valamely tövvény «*bizonyítását*» kivánja! Ennek a követelésnek *nincs értelme*, mert ezek a törvények ismert számú esetben *bizonyosak* s egyedül csak érvényességi körüknek a *határa* bizonytalan. Azonban erre sem kell a fizikát *külön* figyelmeztetni, hiszen nagyon jól *tudjuk*, hogy ezen általánositásnál nem vehettük figyelembe a még csak *ezután* felfedezendő tényeket s így ezekre *nem* is fog *szükségképen* érvényes lenni! Éppen emiatt a fizika állandó *nyilvántartást* vezet általánosított törvényeinek folyton bővülő érvényességi köréről s a kutatások folyamán folytonos *ellenőrzést* gyakorol olyanformán, hogy 1. az általános elvekből vont *következtetéseket* folytonosan összehasonlítja a *tapasztalattal*, 2. az új tapasztalatokat pedig összehasonlítja az általános elvekkel. A fizikában tehát «a *tények* beszélnek», nem pedig ismeretrendező eljárásaink *keretei!*

Egyik legtermékenyebb ismeretrendező elve a fizikának tudvalevőleg az *energiamegmaradás elve.* Vizsgáljuk meg tehát «*kuriózum*»-képen ezt az elvet egy nagyon egyszerű esetben: az *ejtőgép* mozgásjelenségeinél! E végből az energiamegmaradás elvéből *le fogjuk vezetni* az ejtőgép «törvényeit» s azután e törvényeket össze fogjuk hasonlítani a *tapasztalattal.*

2. Az ejtőgép törvényszerűségei.

A) *Energetikai rész.*

Az ejtőgép eredetileg a gyorsuló mozgás tanulmányozására szolgált s készítésénél konstrukczionális nehézségét éppen a súrlódás *csökkentése* okozott. Az újabb frikcziós gépek ugyan ebben a tekintetben bámulatos haladást mutatnak, a surlódás mind a mellett ezeknél is mint «kellemetlen» mellékjelenség jelentkezik s azért újabb időben sokan kezdték az ejtőgéppel történő kisérleteket mellőzni, «*Ki az ejtőgéppel a középiskolából!*» — ez lett a jelszó. Mi a gondolatmenetet meg fogjuk fordítani s kimondjuk a jelszót: «*Vissza az ejtőgéppel a középiskolába,* éppen a — *surlódás* tanulmányozása czéljából!» Mert miért ne kerülhetnők meg a nehézségeket éppen azáltal, hogy *magát a surlódást* tesszük (természetesen csak kinematikai szempontokból!) vizsgálat tárgyává? Hátha ez a vizsgálat a középiskolai oktatás szempontjából *gyümölcsözőbb* eredményekre fog vezetni, mint az eddigi tárgyalás, melyben a surlódás, mint «*zavaró mellékjelenség*» szerepelt? Valóban ki fogjuk mutatni, hogy az ejtőgép a súrlódás *általános*[1] vizsgálatára kiválóan *alkalmas* és első pillanatra *meglepő* eredményekre vezet.

Evégből az ejtőgépnek régi tipusát fogjuk meggondolásaink alapjává tenni. Ennél az alaknál a lehetőleg pontosan czentrírozott kerék tengelyvégei *kúpos* fúrású csavarokban, mint csapágyakban forognak. Ennek a kerületén átvetett vékony selyemszálon függ ez a két nagyobb fajta C_1 illetve C_2 tömeg, melyek egymást az egyenlőkarú emelő törvényei szerint ellensúlyozzák ($C_1 = C_2$). Az egyik oldalra néhány grammnyi r tömeget téve, az egyensúly felbomlik, a (C_1+r) tömeg lefelé, a C_2 tömeg felfelé kezd mozogni változó sebességgel s ezenkivül a *kerék* is gyorsuló forgásba jön. A tengely és csapágy között működő súrlódás staczionárius viszonyok között egyedül a csavarok kölcsönös helyzetétől s a C tömegek súlyától származó csapnyomástól függ, a mennyiben az ejtőgépnél használt túlsúlyok az *összes mozgó tömegekhez képest* kicsinyek. A csapágyakat beljebb csavarva a súrlódás növekedni fog, mert a tengely erősebb nyomás alá kerül, azonban a csavarok *változatlan* helyzete mellett s *ugyanazon* C tömegek esetében *állandónak tekinthető.*

Legyen az ily módon létesitett súrlódás æquivalens tömege ϱ, akkor a tulajdonképen működő erő nem rg, hanem csak $(r-\varrho)\, g$ lesz (hol g a nehézségerő intenzitása!), mert a súrlódás az erő ellenében hat. Ha tehát az r tulsúlyt[2] bizonyos s úton át ejtjük, az eredő munkája $(r-\varrho)\, gs$ lesz. Az energiamegmaradás elvét alkalmazva.

$$(r-\varrho)\, gs = E$$

egyenlethez jutunk, hol $E =$ a haladó és forgó mozgás kinetikus energiája. Legyen a kérdéses pillanatban a translatorius sebesség v, a forgó kerék szögsebessége ω, akkor

[1] Tehát nem a súrlódás *speciális* törvényeinek megállapiátásról lesz szó!

[2] Az elnevezésben mutatkozó anachronizmust egyelőre engedjük meg magunknak!

$$E=\frac{1}{2}(2C+f+r)v^2+\frac{1}{2}K\omega^2.$$

Itt f a fonál tömegét, K a kerék tehetetlenségi nyomatékát jelenti.

Minthogy azonban a kényszerkapcsolat miatt a fonál haladó mozgásának sebessége ugyanakkora, mint a kerék kerületi sebessége,[1] ennélfogva ha R a kerék sugarát jelenti

$$R\omega=v$$

helyettesítéssel

$$E=\frac{1}{2}\left(2C+f+r+\frac{K}{R^2}\right)v^2.$$

Az itt szereplő $k=\frac{K}{R^2}$ tömeget a kerék *redukált* tömegének szokás nevezni.

Minthogy a kisérlet közben a gép mozgó részeinek

$$2C+f+k$$

tömege *állandó* marad, jelöljük rövidség kedvéért M-el. Ekkor legelső egyenletünk

$$\frac{1}{2}(M+r)v^2=(r-\varrho)gs$$

alakban írható, melybe

$$v=\gamma t$$

$$s=\frac{1}{2}\gamma t^2$$

értékeket helyettesítve

$$\frac{1}{2}(M+r)\gamma^2t^2=(r-\varrho)g\frac{1}{2}\gamma t^2$$

egyenlethez jutunk, honnan a gyorsulás

$$\gamma=\frac{r-\varrho}{M+r}g$$

[1] A fonal csuszamlása ugyanis ki van zárva!

Ebből közvetlenül látható, hogy az ejtőgépen a gyorsulás *nem arányos* a túlsúlylyal. Ellenkező esetben ugyanis arra az abszurdumra jutnánk, hogy *kellő* nagy túlsúly alkalmazásával a *szabad* esés gyorsulását nemcsak el lehetne érni, hanem még fölül is lehetne múlni.

Ezek után áttérve az ejtőgép speczialis mozgásjelenségeinek vizsgálatára, hangsúlyoznunk kell, hogy *izolált*, önmagában álló, jelenség nincs a világon! A valóságban mindig a jelenségek egész csoportjával van dolgunk s ezeknek izolálása valamely vizsgálat szempontjából *csak elvileg* lehetséges, gyakorlatilag mindössze annyiban vihető keresztül, hogy a *többi* jelenségtől egyszerűen *eltekintünk!*

Így ha az ejtőgépen az indítás után t időpillanatban az r túlsúlyt a mozgó tömegről leemeljük, az *ezután* bekövetkező jelenségcsoportot tekinthetem ugyan egyoldalú szempontból egyszerű *helyzetváltozásnak*, de ugyanekkor világosan belátom, hogy *ezzel* még nem merítettem ki a vizsgálatot. Hiszen közben az útból félretolt levegő is mozgásba jön s ezenkívül még egy egészen más természetű energiaváltozást is tapasztalunk, a mennyiben a súrlódás következtében a forgó tengelyen *hőfejlődés* mutatkozik.

Ez a meggondolás világosan mutatja, hogy az említett jelenség nem írható le egyszerűen azzal a kijelentéssel, hogy «a túlsúly leemelése után bizonyos τ idő mulva a mozgás megszűnik», mert ugyanezen idő alatt még *más* változások is történtek a kérdéses rendszerben. Ha azonban mi a jelenségek folytatólagos vizsgálatától *eltekintünk* s egyedül a mozgásban beálló változásra fordítjuk figyelmünket az akkor, aránylag kicsiny *légellenállástól egyelőre eltekintve,*[1] a kérdéses folyamatot a következő általános kijelentéssel jellemezhetjük:

«A túlsúly leemelése után megmaradt $\frac{1}{2} Mv^2$ mozgási energiát a súrlódás bizonyos σ úton fel fogja emészteni.»

Minthogy az előzők szerint a súrlódás kinetikai æqui-

[1] A lassúdó mozgás miatt ugyanis *kis* sebességekről lehet csak szó!

valense $= \varrho g$, ennélfogva az energiamegmaradás elvét jelen esetben a

$$\varrho g \sigma = \frac{1}{2} M v^2$$

egyenlet fejezi ki. A sebesség

$$v^2 = 2\gamma s = 2 \frac{r-\varrho}{M+r} g s$$

értékét helyettesítve

$$\varrho \sigma = \frac{M}{M+r} (r-\varrho) s \tag{1}$$

egyenlethez jutunk. Minthogy azonban az r túlsúly az összes M mozgó tömeghez képest mindig kicsiny, ennélfogva *első közelítésben*

$$\frac{M}{M+r} \sim 1.$$

A jelzett közelítéssel az energia megmaradását kifejező egyenlet

$$\varrho \sigma = (r-\varrho) s$$

egyszerűbb alakra redukálható. Legyen az egész mozgási proczessus útja

$$s + \sigma = S,$$

akkor

$$r s = \varrho S \tag{2}$$

alapegyenlethez jutunk s egyúttal ezzel kivánjuk a súrlódás æquivalens tömegének *számértékét* definiálni. Bár eddigi eljárásunk jogossága az eddigiekből is világosan kitűnik, mind a mellett a tapasztalati ellenőrzéstől tesszük függővé olyan értetemben, hogy ha ezen egyenletből vont következtetéseket a tapasztalás megerősíti, akkor eljárásunk helyességét véglegesen beigazoltnak fogjuk tekinteni.

Valóban ki fogjuk mutatni hogy 2. alapegyenletünk az ejtőgép *összes energetikai vonatkozásait magában foglalja* s bár szigorúan véve csak közelitő jellegű ugyan, mind a mellett az eltérés a valóságtól oly kicsiny, hogy eltűnik a kisérleti hibák határai közt.

A kisérleti kivitelnél a következő speciális esetek lehetségesek:

a) Ugyanazon r túlsúly esetén a szigorúan érvényes 1. egyenlet értelmében

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{s_1}{s_2} \tag{3}$$

a lassúdó mozgás útja az ejtési magassággal arányos.

Ezenkívül az egyenletet

$$s_2\sigma_1 = s_1\sigma_2$$

alakban írva és

$$s_2 s_1 = s_1 s_2$$

azonosságot hozzáadva

$$s_2(s_1+\sigma_1) = s_1(s_2+\sigma_2)$$

egyenlethez jutunk, honnan

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{s_1}{s_2}, \tag{4}$$

vagyis *az egész mozgás útja is arányos az ejtési magassággal.*

Összefoglalva a (3) és (4) egyenleteket: ugyanazon túlsúlylyal kisérletezve

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

b) Ugyanazon ejtési magasság mellett (2) egyenlet értelmében

$$S = \left(\frac{s}{\varrho}\right) r,$$

vagyis *az egész út arányos a túlsúlylyal.*

c) Egész általánosan különböző túlsúlyokat különböző magasságról ejtve

$$S = \left(\frac{1}{\varrho}\right) rs$$

a mozgási proczesszus egész útja arányos a túlsúly munkájával. A kisérleti eljárásnál a súrlódást néhány előzetes ejtéssel stacionáriussá tesszük (a tengelyt «bejáratjuk») s azután mindegyik ejtést legalább 5—5-ször ismételve, az így nyert középértéket vesszük alapul.

Ilynemű kisérletek, miként arról bárki meggyőződhetik, *ezeket az összefüggéseket igen jó közelítéssel igazolják.* A súrlódás hatása staczionárius viszonyok között tehát, jogosan helyettesíthető állandó erővel, a mennyiben 1. 2—3-szor akkora energiát 2—3 akkora úton emészt fel, 2. állandó mozgásváltozást létesít.

Van azonban egy lényeges különbség is a kettő között! A súrlódás ugyanis akadály jellegű lévén, csakis negativ gyorsulást létesíthet, azaz más szóval: a súrlódás által okozott mozgás változás *csakis* lassúdás lehet!

B) *Az energetikai viszonyok vizsgálata kinetikus szempontból.*

Az előbbiekben a túlsúly működését abból a szempontból vizsgáltuk meg, hogy mozgása közben az általa megtett *útat* vettük tekintetbe. Most e vonatkozásokat az erő *működési idejének* szempontjából kivánjuk tekinteni.

Evégből előzőleg egy általános meggondolást fogunk végezni az erő munkájára vonatkozólag.

Legyen az m állandó tömegre ható állandó erő p, az erő irányában megtett út s, akkor az erő munkája a gyorsulással kifejezve

$$ps = p\,\frac{1}{2}\,\gamma t^2.$$

A gyorsulás

$$\gamma = \frac{p}{m}$$

értékét helyettesítve

$$ps = \frac{(pt)^2}{2m},$$

a mi annyit jelent, hogy *ugyanazon tömegre ható állandó erő munkája arányos a saját impulzusának négyzetével.*

Az ejtőgépre alkalmazva az

$$S = \left(\frac{1}{\varrho g}\right) rgs$$

egyenletből következik, hogy

$$S = \frac{rg\,.\,t)^2}{\varrho g 2\,(M+r)},$$

vagyis az *egész mozgási proczesszus útja arányos* a túlsúly *impulzusának négyzetével* (mert r mindig kicsiny M-hez képest).

Az előző általános esetnél maradva vizsgáljuk meg, mily feltétel mellett végeznek különböző erők, különböző tömegeken *egyenlő* munkát?

A

$$p_1 s_1 = p_2 s_2$$

feltételből

$$p_1 s_1 = \frac{(p_1 t_1)^2}{2m_1}$$

$$p_2 s_2 = \frac{(p_2 t_2)^2}{2m_2}$$

helyettesítésekkel

$$\frac{(p_1 t_1)^2}{(p_2 t_2)^2} = \frac{m_1}{m_2}$$

egyenlethez jutunk, melynek értelmében: különböző intenzitású erőterekben *egyenlő munkákhoz tartozó erőimpulzusok négyzetei úgy viszonylanak egymáshoz, mint a mozgó tömegek.*

Azon speczialis esetben, mikor

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{p_1 t_1}{p_2 t_2} = 1$$

vagyis

$$p_1 t_1 = p_2 t_2.$$

Tehát *ugyanazon tömeg esetén egyenlő munkákhoz egyenlő erőimpulzusok tartoznak.*

Ezen esetben tehát a

$$p_1 s_1 = p_2 s_2$$

$$p_1 t_2 = p_2 t_2$$

egyenleteknek *egyszerre* kell teljesülniök, a miből rögtön következik, hogy

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2},$$

a mi annyit jelent, hogy ugyanazon tömeg esetén egyenlő munkákhoz egyenlő középsebességek tartoznak.

Az ejtőgépre alkalmazva: ha fennáll az

$$(r-\varrho)\, s = \varrho\sigma$$

egyenlet, akkor okvetlenül teljesül a következő is

$$(r-\varrho)\, t = \varrho\tau, \qquad (5)$$

hol τ a lassúdó mozgás ideje.

Rövidség kedvéért legyen az egész mozgás ideje

$$t+\tau = T,$$

akkor egyenletünk az

$$rs = \varrho S$$

formával analóg

$$rt = \varrho T \qquad (6)$$

alakba megy át, a miből rögtön következik, hogy

a) Ugyanazon túlsúly esetén

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_1}{t_2}, \qquad (7)$$

vagyis *a lassúdó mozgás időtartama arányos az ejtés idejével.* De ugyanebből következik az arányosságok tana szerint az is, hogy

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1+\tau_1}{t_2+\tau_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

vagyis *az egész mozgási folyamat időtartama is arányos az ejtés idejével.*

Mindezeket összefoglalva

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{T_1}{T_2}. \qquad (8)$$

Ezenkívül az

$$(r-\varrho)\, s = \varrho\sigma$$
$$(r-\varrho)\, t = \varrho\tau$$

egyenletek összehasonlításából

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{s}{t} = \frac{S}{T}, \tag{9}$$

vagyis *egyanazon túlsúly esetén az itt szereplő összes középsebességek invariánsok maradnak.*

b) Ugyanazon ejtési időtartam mellett (6) egyenlet értelmében

$$T = \left(\frac{t}{\varrho}\right) r$$

vagyis *a mozgás egész időtartama a túlsúlylyal arányos.*

c) Egész általánosságban

$$T = \left(\frac{1}{\varrho}\right) rt$$

vagyis a mozgás egész időtartama a túlsúly impulzusával arányos s ezenkívül

$$\frac{s}{t} = \frac{S}{T}.$$

Bár az idő mérése az ilynemű kisérleteknél a megállás pillanatának subjektiv határozatlansága folytán nem végezhető valami nagy pontossággal, mind a mellett *a kisérletek az itt levezetett összefüggéseket kivétel nélkül igen jó közelítéssel igazolják.*

C) *Kinematikai megfontolások.*

Az ejtőgép eredetileg a gyorsuló mozgás törvényszerüségeinek tanulmányozására szolgált, a mennyiben erre a czélra a szabadesés nagy gyorsulása miatt nem volt használható. Ezt a nehézséget Atwood a következő szerencsés meggondolással kerülte meg:

A szabadesésnél azért oly nagy a gyorsulás, mert a test súlya csak a saját maga aránylag kicsi tömegét mozgatja. Arra kell tehát törekednünk, hogy *kis* súlylyal *nagy* tömeget lehessen mozgásba hozni, mert akkor a gyorsulás kicsiny lesz s így az egyes időpontok megfigyelése és az időközök lemérése nagyobb pontossággal történhetik s a kis sebességek miatt a légellenállás zavaró hatása is jelentéktelenné válik.

Legyen ugyanis a túlsúly tömege r, a súrlódás æquivalense ϱ, akkor a tulajdonképeni mozgató erő $(r-\varrho)g$. Ez mozgatja 1. magát az r tömeget 2. a gépnek mozgó részeit: az f tömegű fonalat, a $C+C$ tömegeket, továbbá a kereket, melynek redukált tömege legyen $= k$. Ilyenformán az összes mozgatott tömeg egy állandó

$$M = 2C + f + k$$

és egy változó részből $(= r)$ áll. Ennélfogva a létesített gyorsulás a definicziónak megfelelő

$$\gamma = \frac{r-\varrho}{M+r} g$$

összefüggés értelmében a szabad esés gyorsulásának csekély hányadrésze.

Minthogy a surlódás nem aktiv erő, hanem csak akadály, ennélfogva okvetlenül teljesülnie kell a $r > \varrho$ feltételnek,[1] hogy mozgás egyáltalában létre jöhessen. Nevezzük rövidség kedvéért az $r = \varrho$ túlsúlyt *kritikus* értéknek, akkor eleve kijelenthetjük, hogy a kritikus értéknél *kisebb* túlsúly az ejtőgépen nem képes mozgást létesiteni, mert a súrlódás legyőzésére nem elegendő.

Vizsgáljuk most azt az esetet, midőn bizonyos $(r+q)$ túlsúlyt τ ideig ejtve az r-et leemeljük. Milyen lesz a mozgás további lefolyása, ha p alatt általában igen kis (0·1—1 gr) túlsúlyokat értünk?

Világos, hogy az $(r+q)$ túlsúly gyorsuló mozgással esik és sebessége τ időpillanatban a

$$v = \gamma\tau$$

---

[1] Pláne mikor tudjuk, hogy a statikai súrlódás *nagyobb* a forgó surlódásnál :

egyenletnek megfelelően

$$v = \frac{r+q-\varrho}{M+r+q} g \,.\, \tau.$$

Az r túlsúly leemelése után ezzel a v *kezdő-sebességgel* a megmaradt $(q-\varrho)$ erő hatása alatt egyenletesen változó mozgás keletkezik az ismeretes

$$s = vt + \frac{1}{2} \gamma t^2$$

egyenletnek megfelelően, melybe v és γ megfelelő értékeit helyettesitve

$$s = \frac{r+q-\varrho}{M+r+q} g\tau \,.\, t + \frac{1}{2} \frac{q-\varrho}{M+q} gt^2$$

egyenlethez jutunk. Ennek a mozgásnak időbeli lefolyása tisztán q és ϱ viszonyától függ.

a) Ha $q < \varrho$, akkor az egyenlet második tagja negativ s így a mozgás lassúdó.

b) Ha $q > \varrho$, ebben az esetben a mozgás magától érthetőleg *gyorsuló* lesz.

b) A *határesetben* minél inkább közeledik q a kritikus $q = \varrho$ értékhez, annál kisebb lesz a retardáczió, azaz annál inkább *közeledik* a változó mozgás egy *idealis egyenletes* mozgáshoz. A mikor q egyenlővé *válnék* ϱ-val, a gyorsulás zérussá lenne és így az ideális gépen (abszolut állandó súrlódást és légüres teret tételezve fel!) az

$$s = \frac{r}{M+r+\varrho} g\tau \,.\, t$$

egyenlet értelmében *egyenletes* mozgást nyernénk eredményül.

A súrlódás *hatásának* ilynemű *kompenzálása* azonban a gyakorlatban nem valósítható meg azon egyszerű okból, mert q értékét csak *ugrásszerüen* pl. milligrammonként tudjuk változtatni. Ezenkivül a kritikus értékhez közeljáró túlsúlyok alkalmazásánál megszűnik a légellenállás elhanyagolásának jogosultsága, a légellenállás kompenzálásáról pedig még beszélni sem lehet, mert ez a sebességtől függő *változó* érték.

Az eddigiekben levezetett törvényszerűségek oly ideális gépre vonatkoznak, melynél a súrlódást állandónak tételeztük fel. A valóságban azonban a forgó kerék excentricitása, a tengely felmelegedése és a kenőszer viscositásának a hőfokváltozás következtében beálló megváltozása mind oly hibaforrások, melyek az elméleti eredményeket némileg módosítják. Az eltéres azonban rendesen oly kicsiny, hogy eltűnik az idő és hosszúságmérésnek kísérleti hibái között.

3. Eredményeink összefoglalása és alkalmazása.

Az eddigiekből kitűnik, hogy *nagy* mozgó tömegek és *kis* túlsúlyok alkalmazása mellett az ejtőgép alkalmas a *súrlódás* kinetikai és energetikai viszonyainak tanulmányozására. Ezen eljárásnál a súrlódás többé nem mint «zavaró» vagy «kellemetlen» *mellékkörülmény* szerepel, hanem mint *számításba vehető* passziv erő, a mennyiben értéke ugyanazon M esetén középértékben *állandónak* tekinthető s az energia megmaradását kifejező

$$\varrho = \frac{rs}{S}$$

egyenlet segítségével *kísérleti adatokból határozható meg.* Ez a meghatározás mindenesetre jóval nagyobb pontosságot ad, mint az a naiv utasítás, hogy «keressünk oly $q = \varrho$ túlsúlyt, melynél a mozgás annyira-amennyire egyenletesnek tekinthető. Az ilyen eljárásnál legfeljebb *találgatásról* lehet szó, *pontosságról* azonban még beszélni sem lehet! Idézett egyenletünkben ellenben a súrlódás æquivalensének meghatározása *hossz- és tömegmérésre van visszavezetve* s mindkettő megfelelő pontossággal eszközölhető. Ilyenformán az egyenlet közelítő jellege daczára néhány százaléknyira pontos értéket ad s *összes következményei a tapasztalással egyező eredményre vezetnek.*

A súrlódás értékének ilynemű meghatározása azért fontos, mert ezáltal lehetővé válik a *szabad esés gyorsulásának meghatározása.* Az eljárás természetesen *csak didaktikai* jelentőségű ugyan, mind a mellett igen jó közelítést enged meg a régebbi tapogatózásokhoz képest.

Így különböző C_1 illetve C_2 nagy mozgó tömegekkel és r_1, illetve r_2 túlsúlyokkal kísérletezve, a gyorsulás értékét megadó egyenletek a következő alakban írhatók:

$$g\frac{r_1-\varrho_1}{\gamma} = (2C_1+r_1) + f+k$$

$$g\frac{r_2-\varrho_2}{\gamma_2} = (2C_2+r_2) + f+k.$$

A két egyenlet különbségéből az ismeretlen $(f+k)$ kiesik és a szabad esés gyorsulásának meghatározására

$$g = \frac{(2C_1+r_1)-(2C_2+r_2)}{\frac{r_1-\varrho_1}{\gamma_1}-\frac{r_2-\varrho_2}{\gamma_2}}$$

egyenletet nyerjük, mely csupa *kísérletileg* meghatározható adatot tartalmaz. A számlálóban és nevezőben szereplő kifejezések értéke elég nagy lévén, meghatározásuk kellő pontossággal eszközölhető.

Ha különböző C_1-C_2 tömegek esetén ugyanazt az $r_1=r_2=r$ túlsúlyt használjuk, akkor a következő egyszerűbb alakra jutunk:

$$g = 2\frac{C_1-C_2}{\frac{r-\varrho_1}{\gamma_1}-\frac{r-\varrho_2}{\gamma_2}}.$$

Ha pedig frikcziós gépről van szó, akkor ϱ_1, illetve ϱ_2 elhanyagolható lévén

$$g = 2\frac{C_1-C_2}{\frac{r}{\gamma_1}-\frac{r}{\gamma_2}}.$$

Ilynemű mérésekkel a $g = 981$ cm sec^{-2} érték igen jól megközelithető, természetesen a nélkül, hogy az ingamérések bámulatos pontosságával versenyeznünk lehetne.

Az eddigiekben ismertetett felfogás mellett az ejtőgép kilép a mostani korlátolt alkalmazási területről s oly czélokra válik használhatóvá, melyekre eddig gondolni sem lehetett. «Vissza tehát az ejtőgéppel az középiskolába!»

Megjegyzés:

Az ejtőgép mozgástüneményeit jellemző és szigorúan érvényes

$$\varrho\sigma = \frac{M}{M+r}(r-\varrho)s$$

egyenlet az energiamegmaradás elvétől *függetlenül* is levezethető tisztán kinematikai megfontolások és definicziók alapján.

Ugyanis a mozgás gyorsulása az ejtőgépen a *definiczió szerint*

$$\gamma = \frac{\text{eredő erő}}{\text{összes mozgatott tömeg}} = \frac{r-\varrho}{M+r}g$$

s így a végsebesség a túlsúly leemelése pillanatában a $v_0 = \gamma t$ képlet értelmében

$$v_0 = \frac{r-\varrho}{M+r}gt.$$

A túlsúly leemelése után ezzel, mint *kezdősebességgel* lassúdó mozgás fog bekövetkezni a súrlódás hatása következtében

$$\gamma_1 = \frac{\varrho}{M}g$$

gyorsulással a

$$\sigma = v_0\tau - \frac{1}{2}\gamma_1\tau^2$$

$$v = v_0 - \gamma_1\tau$$

egyenletnek megfelelően. Ez a lassúdó mozgás mindaddig tart, míg végsebessége $v = 0$ nem lesz. Ebből a feltételből e mozgás időtartama

$$\tau = \frac{v_0}{\gamma_1}$$

s a befutott út

$$\sigma = \frac{v_0^2}{2\gamma_1}.$$

Azonban

$$v_0^2 = 2\gamma s$$

helyettesitéssel

$$\sigma = \frac{\gamma}{\gamma_1} s$$

honnan tekintettel γ és γ_1 definicziós egyenletére

$$\varrho\sigma = \frac{M}{M+r}(r-\varrho)\, s$$

alapegyenlethez jutunk s épen *ez* fejezi ki az energiamegmaradás elvét!

Bodócs István.

A FÉNYTÖRÉS TÖRTÉNETÉHEZ.

1. *A kérdés mai állása.* Azoknak a physikai munkáknak irói, a kik a czimben megjelölt vagy azzal kapcsolatos physikai kérdésekkel közelebbről foglalkoznak, nem szoktak nagyobb súlyt helyezni arra, hogy a fénytörés ama törvényének, mely az $n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}$ közönségesen ismert egyenlet által adatik, ki volt a megállapitója. Így eshetik meg, hogy az egyik munka a törvényt, gyanitott felfedezője után SNELL-féle, a másik DESCARTES-féle, a harmadik viszont, a két nevet összefogottan, SNELL-DESCARTES-féle törvénynek nevezi, míg ezzel szemben vannak olyan írók is, a kik említést sem tesznek a törvény felfedezőjéről, esetleg a felfedezés történeti oldaláról. Maguk a physika történetének hivatásos irói is, főleg DESCARTES szellemi nagyságára való tekintetből, általában óvatosan kezelik a fénytörés történeti részét s úgy látszik, hogy a fénytörés törvényének felfedezése ügyében a prioritás és a vele kapcsolatos igen kényes természetű kérdés elbirálásában még a faji és nemzeti féltékenykedésnek is szerep jutott.

Kétségbevonhatatlan történeti tény ugyan, hogy a fénytörés fentebbi törvényét először DESCARTES publicálta, 1637-ben a Módszerről írt értekezésével kapcsolatban megjelent *Dioptrica* czimű művében. A törvény közzététele s különösen DESCARTES halála után azonban kétségeskedések kezdettek felhangzani a tudományos körökben arra nézve, hogy a felfedezés érdeme méltán megilleti-e DESCARTES-ot, minthogy VOSS és HUYGENS nyilatkozata szerint az ifjabb SNELL, a leydeni egyetem tanára már DESCARTES említett művének megjelenése előtt megállapitotta a fénytörés törvényét $n = \frac{\operatorname{cosec} r}{\operatorname{cosec} i}$ alakban s ők e törvénynek — nyomtatásban ugyan soha meg nem jelent — kéziratát látták is. S minthogy aztán a gyanú szerint DESCARTES Hollandiában való hosszabb tartózkodása alatt SNELL törvényét megismerhette s ennek daczára Dioptricája megfelelő helyén erről még csak említést sem tesz: készen állott a vád DESCARTES ellen, főleg az angol physikusok részéről, hogy a fénytörés törvényének felfedezésében a prioritás DESCARTES-ot nemcsak nem illeti meg, de sőt a leghatározottabb értelemben plagizált, mikor említett művében, a fénytörés törvényeivel kapcsolatban SNELLre mint felfedezőre nem hivatkozott. Ezzel szemben, Aragóval élükön, főleg a franczia physikusok, DESCARTES védelmében azt vitatták, hogy DESCARTES-ot, mint publicatort e kérdésben úgy a prioritás érdeme, mint a felfedezés dicsősége is megilleti.

Úgy a vádlók, mint a védelmezők a maguk itéletének igazolására pusztán csak olyan külsőleges ténykörülményekre és dátumokra hivatkoznak, a melyek valószinűvé, esetleg éppen elfogadhatóvá tehetik ugyan egyik-másik olvasó előtt állításukat, de azt kétségbevonhatatlan bizonyossággal nem igazolhatják.

Értekezésemnek czélja az, hogy DESCARTES physikájából, főleg pedig idevágó opticai műveiből vett adatokkal, tehát mélyebben fekvő, belső érvekkel és tényekkel világítsam meg s döntsem el azt a kérdést, hogy a fénytörés törvényének megállapításában DESCARTES igazság szerint és jogosan illethető-e a plagizálás vádjával s általában kit illet meg a törvény megalkotásában a prioritás érdeme?

2. *Descartes physikájának alapjai.* Amint tudjuk, DESCARTES alkotó munkássága, a bölcsészeti tudományok mellett, a physika körére is szélesen kiterjedt. E jelenségek magyarázata, tudás-szomján s kutatás-vágyán kívül, abban van, hogy a tudományoknak az ő korabeli osztályozása szerint a physika a philosophiának egyik ágát képezte. A physika körében kifej-

tett munkásságával aztán, — mint azt Descartes mechanikájára vonatkozó egyik tanulmányomban[1] részletesebben kifejtettem, — megvetette alapját egy olyan physikai rendszernek, mely a természetvizsgálat két irányát: a bölcsészetit és az empiricusat egyesíti s mely, Galilei munkássága mellett, kétségtelenül nagy befolyással volt arra, hogy a physikai kutatásnak eddigi módszere a maira változzék meg. Descartes physikája egyébiránt az ő philosophiai rendszerébe mint annak egyik alkotó, sőt kiegészítő része szervesen belekapcsolódik, mi annál is természetesebb, minthogy Descartes a maga philosophiája alapjainak lerakásában s törvényeinek megállapításában is ugyanezeket a gondolkodásbeli alapelveket és eszközöket használta fel, melyekkel physikai rendszerét megalkotta.

Descartes physikai rendszere két, egymással szerves kapcsolatban álló alaptételen épült fel.

1. *A physikai test lényegét a három irányban való kiterjedés definiálja.*[2]

2. *Üres tér nincs.*[3]

Az első tételből közvetlenül következik, hogy a testi természet anyaga csakis egyféle lehet s így anyagi világ is csak egy van. Ennek az egyféle s a tért folytonosan betöltő anyagnak alaptulajdonsága a végtelenig vihető oszthatóság, miáltal részei különbözőképpen csoportosíthatók s egymással szemben más-más helyzetbe hozhatók. Az ilyen csoportosításnak, vagy más névvel az egyes testeknek, mint elkülönített physikai egyedeknek, individuumoknak a mozdulatlan és végtelen anyagból való kiválása csak mozgás útján történhetik meg. A Descartes-féle mozgásnak tehát, a testek előállása szempontjából, jellegzetesítő tulajdonsága van, minthogy a testek általa és csakis általa válnak felismerhető és önálló physikai valóságokká.[4]

---

[1] Descartes mechanikájának alaptételei, az Athæneum 1905. évfolyamának 3. és 4. számában.

[2] Descartes: Principia Philosophiæ II. r. 3., 4., 9., 11. p.

[3] Descartes: Principia Philosophiæ II. r. 16., 17., 18. p.

[4] Descartes: Principia Philosophiæ II. r. 20—23., 36., 64. p.

Az üres tér lehetőségének elvetéséből, tagadásából viszont DESCARTES-nak az a nagyjelentőségű tantétele következik, hogy *közvetetlen távolba hatás sincs* és hogy az összes természeti tünemények egységes alapja az egymással érintkező testek közvetitése útján, mechanikai törvények szerint lefolyó *ütközés* és *nyomás*, tehát *mozgás*. És következik továbbá az is, hogy a testek anyagrészei közt megfigyelhetőköztereket egy másik test, mint később látni fogjuk, valamely igen finom anyagnak kell kitöltenie.[1]

A természeti tünemények megjelenésében és lefolyásában megnyilatkozó törvényszerűségnek megállapitására DESCARTES is a kisérletet és a megfigyelést tartja alkalmatos eszköznek s ezzel a physikai kutatás módszerében igen közel áll GALILEI-hez s így a mai physika módszeréhez is. Az ő physikája és a mai physika idevonatkozó felfogása között azonban, a módszert illetőleg, kettős külömbség van. Az egyik az, hogy DESCARTES előtt a kisérletnek a mainál kisebb jelentősége van a physikai kutatásban s a kisérlet előtte inkább csak az általános physikai elvekből vont következtetéseknek és deductióknak ellenőrzője. A másik viszont az, hogy DESCARTES hypothesist, a szó mai értelmében, nem ismer. Az első különbség természetes következménye ama philosophiai alaptételének, hogy az érzékek útján szerzett ismereteink megbízhatóságában kételkednünk kell, minthogy érzéki észrevételeinkben lépten-nyomon tévedünk; a másodiknak magyarázata viszont abban van, hogy ő előtte a tüneményeknek csak valószínűeknek látszó okai is kétségtelen igazságok, mert keresésükben Isten igazságossága volt a vezetője, ki pedig őt meg nem csalhatja.[2]

3. *Descartes fénytanának alapfogalmai.* DESCARTES a fény lényegére vonatkozó elméletében a leghatározottabban kétségbe vonja, hogy az, mi bennünk a fény érzetét kelti fel, valame-

---

[1] Descartes: Principia Philosophiæ II. r. 5—7., 34., 42—45., 53. p.

[2] Descartes: Módszer 43., 46. lap. Philosophiai Irók Tára, Alexander B. fordításában.

lyes olyan anyag volna, mely a látott testekből szemünkig terjed. A világító testekből kiinduló fényt a mozgás olyan fajának, olyan eleven actiónak tekinti, mely az átlátszó testeken át érkezik el szemünkig. Üres tér nem lévén s ennek folytán a testek köztereit is valamely más anyag töltvén ki, olyan közeget kell, DESCARTES szerint is, felvennünk a fényterjedés tüneményének a megmagyarázására, mely szakadatlan folytonosságban a nagy világűrt kitölti s a testek porusaiba is behatol.[1]

Melyik ez a közeg?

DESCARTES a világrendszer előállásának a megmagyarázására azt teszi fel, hogy az a homogen anyag, melylyel a világtér kitöltetett s melyből az egész testi természet formáltatott, már kezdetben olyan egyenlő részekre osztatott fel, a melyek egyenként forgó mozgásnak indultak. E mozgás következtében s annak hatása alatt az eredetileg egy anyagból három, alakra és szerkezetre nézve különböző, anyagfaj képződött, melyeket DESCARTES a természet három anyagának vagy elemének neveztt el. DESCARTES tanítása szerint az első anyagból képződött, bizonyos feltételek mellett, a Nap és az álló csillagok rendszere, a harmadikból a Föld, a Bolygók és az Üstökösök és a második anyag alkotja az *ég anyagát,* ezt a hypothetikus közeget, mely DESCARTES-nál éppen azt a szerepet viszi a fénytanban, mint a mai physikában a világæther. A fény u. i. a második elem gömbalakú részeinek nyomás által közvetített mozgásából áll elő és közvetíttetik tovább.[2]

És DESCARTES szerint e három elem éppen elégséges a fénytünemények keletkezésének és lefolyásának megmagyarázására. Mert az első elemből képződött Napok a fényt gerjesztik, a második elem éganyaga a fény közvetítő közege s végre a Föld, a Bolygók és az Üstökösök azok a testek, a melyek a fény sugarait felfogják és visszaverik.[3]

---

[1] Descartes: Dioptrica I. r. 3., 5., 6., 7. p. és Meteorok VIII. 6. p.
[2] Descartes: Principia Philosophiæ III. r. 46—70., 87—119. p.
[3] Descartes: Principia Philosophiæ III. r. 52. p.

A második elem aztán a fényt egyenes vonalak irányában terjeszti tovább s azok az egyenesek, melyekben a fény terjed, DESCARTES szerint is a *fénysugarak*. A világító test egyes pontjaiból kiinduló fénysugarak száma végtelen sok.[1]

A mint DESCARTES a fényt mozgással definiálja, úgy a fény szinét is a fényt terjesztő közeg részeinek mozgási módjával határozza meg. Ha u. i. szerinte a közeg elemi részeinek haladó mozgásához egyuttal a forgó mozgásnak is meghatározott sebessége járul, a keletkezett fény színe vörös. Ha aztán az egyes elemi részek forgási sebessége ennél kisebb és kisebb lesz, a fény színe fokozatosan a narancs, sárga, zöld, kék, ibolya változatába megy át.[2]

Ha a fénysugarak új közeg határlapjához érkeznek, kettős tünemény figyelhető meg. A sugarak egy része az új átlátszó közeg határlapjáról visszaverődik, másik része pedig az új közegbe behatol. Előbbi a visszaverődés, utóbbi a törés tüneménye. Ezekkel kapcsolatban aztán DESCARTES egészen a mai értelemben állapítja meg a tükrök nemeit. A testek színét emigy értelmezi: azok a testek, melyek a rájok eső fénysugarakat mind elnyelik, *feketék*; azok, a melyek a rájok eső fénysugarakat mozgásukban való minden változás nélkül verik vissza, *fehérek*; azok viszont, a melyek ebben bizonyos mértékű változást idéznek elő, *szinesek*.[3]

DESCARTES physikájának ezekből a fénytani alaptételeiből és elveiből többnyire a modern physika eszméi csendülnek ki s annak meggondolásával, hogy ezek az eszmék a NEWTON előtti időkből származnak, feltétlen elismeréssel kell lennünk alkotójuk szellemi nagysága iránt. DESCARTES különben két nagy jelentőségű physikai kérdésben megelőzte NEWTONT. A közvetlen távolba hatás lehetőségét nem ismerte el, miről NEWTON az ő gravitatiós törvényében még hypothesist sem állított fel;

---

[1] Descartes: Dioptrica I. 7., 8., 9. p.

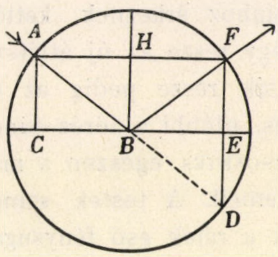
[2] Descartes: Dioptrica I. 4. Meteorok VJII. 6., 7. Tractatus de formatione foetus 31. p.

[3] Descartes: Dioptrica I. 8., 9., 10.

a fényt pedig, NEWTON anyagi elméletével szemben, mechanikai hatás útján terjedő mozgási tüneménynek definiálta.

4. *A fény visszaverődése és törése.* *a)* A fény törésének tüneményét DESCARTES a fény visszaverődésével kapcsolatban tárgyalja, nemcsak azért, mert e két tüneményt rokonságban állónak tartja, hanem főleg azért, mert nézete szerint a törés tüneménye könnyebben érthetővé válik a visszaverődése ismerete által. Mindkét tünemény törvényszerűségét egy-egy analogiával kapcsolatban állapítja meg. Tartalmi kivonatban és a physika mai nyelvén a következőképen:

Ha valamely rugalmas labda bizonyos sebességgel *A* pontból egyenes irányban a földfelület *B* pontjához érkezik, onnan visszaverődik. Hogy, DESCARTES szerint, a tünemény megérthetését ne compliçáljuk, tegyük fel, hogy a földfelület teljesen sima és merev, továbbá hogy a labda esésében és emelkedésében is ugyanazzal a sebességgel van felruházva s végre hogy a tünemény lefolyására a labda nagysága, alakja vagy súlya nincsen befolyással. Az a sebesség, melylyel a labda *B*-be érkezik *AH* vizszintes és *AC* függőleges összetevőre bontható fel, melyek közül a föld ellenállása csak a függőlegest semmisitheti meg, míg a vízszintes állandó marad. Ha *AB* ingával kört írunk, akkor amely idő alatt a labda *A*-ból *B*-be érkezik, azalatt a fentebbi feltétel mellett *B*-ből a kör kerületének valamely pontjába kell jutnia. E pont megállapitására állítsuk *BC*-re az *AC*, *HB*, *FE* merőlegeseket egymástól egyenlő távolságban. A mely idő alatt aztán a labda *A* ból, az *AC* egyenes egyik pontjából *B*-ig, a *HB* egyenes egy pontjáig eljut, ezalatt *B*-ből az *FE* egyenes valamely pontjáig kell eljutnia. Minthogy pedig a kör és *FE* egyenes a vízszintes sík felett csak egy pontban metszik egymást, a labda a visszaverődés után *F* ponton megy át.[1]

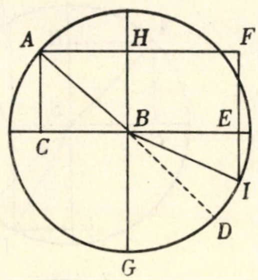


1. ábra.

[1] Descartes: Dioptrica II. 1., 2. p.

Minthogy pedig a fény visszaverődésének tüneménye a rugalmas labda megfelelő tüneményének törvényszerűségét követi: ugyanez történik az *AB* irányban valamely síktükörre eső fénysugárral is, mely tehát, az ütközés törvénye szerint, úgy veretik vissza, hogy a beesési szög a visszaverődési szöggel egyenlő.[1]

b) Ha másodszor aztán azt tesszük fel, hogy az *AB* irányban elhajított labda oly test *CE* felületéhez — pl. vizéhez — érkezik, a melyen áthatolhat, akkor az új közegben sebességének pl. a felét elveszíti. A sebességet ezúttal is a fentebbi módon bontsuk fel két összetevőre, melyek közül ebben az esetben is csak a függőleges változhatik meg, míg a vízszintes állandó marad. Rajzoljuk meg ismét az *AB* sugarú kört s *CE* felületre az *AC*, *HB*, *FE* merőlegeseket, utóbbiakat azonban ezúttal úgy, hogy *FE*-nek *HB*-től való távolsága kétakkora legyen, mint *HB*-nek távolsága *AC*-től. A labda most irányából kitéríttetvén, *BI* úton át *I* pontba érkezik. Mikor ugyanis az új közegbe behatol, sebességének felét elveszítvén, kétakkora idő alatt ér az új közegben *B* pontból a kör valamelyik kerületi pontjához, mint a mekkora idő alatt az *AB* utat megtette. Es minthogy a sebesség vízszintes összetevője nem változik meg, a labda annak az időnek kétszerese alatt, mely alatt *AC* egyenestől *HB* egyenesig eljut, *FE* egyenes valamely pontjáig érkezik, mely pont nem lehet más, mint az, a melyben *FI* és a kör kerülete az új közegben egymást metszik. A labda ilyen nagy eltéríttetése annál nagyobb, mennél ferdébben találja az új közeg felületét és ha a beesés iránya a felületre merőleges, ilyen eltérítés nincsen. Tételezzük fel aztán másfelől, hogy az *AB* irányban levő labda oly testbe hatol

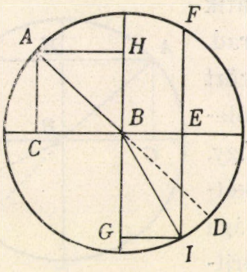


2. ábra.

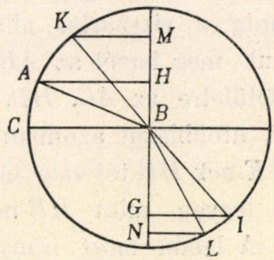
[1] Descartes: Dioptrica II. 3. p.

be, mely az ő sebességét pl. harmadrésznyivel megnöveli, úgyhogy az új közegben két secundum alatt tesz meg akkora utat, mint az eredetiben három alatt. Az előbbi szerkesztést ezúttal úgy víve keresztül, hogy az *FE* és *HB* közti távolság $^1/_3$-dal kisebb legyen, mint a *HB* és *AC* közötti, azt fogjuk találni, hogy a labda most *BI* úton át *I* pontba jut. Természetes, hogy ha a labda az alsó közegen át jutna a felső közeg határlapjához, az új közegben *BA* irányban folytatná mozgását.[1]

Minthogy aztán a fény törése ugyanazokat a törvényeket követi, mint a melyeket a labda fentebbi mozgásában meg-



3. ábra.



4. ábra.

ismertünk, azért valahányszor a fénysugarak egyik átlátszó közegből a másikba mennek, irányukból eltöretnek. A törés tüneménye a fénysugarak esetében csakis annyiban különbözik a labda eltérítésétől, hogy a fénysugarak pl. a vízből levegőbe való átmenetük alkalmával a levegőben jobban a felülethez töretnek, mint a vízben. E jelenségnek Descartes szerinti s általa e helyen részletesebben is megindokolt oka főleg abban van, hogy a fénysugarak annak a közegnek a mozgásából erednek, a mely a testek köztereit kitölti. Ha tehát valamely fénysugár *AB* irányban esik, pl. az üveg *CB* felületére, *BI* irányba töretik meg, egy másik pedig, mely *KB* irányban jön, *BL*-be töretik. Természetes, hogy ha megfordítva a fénysugár

[1] Descartes: Dioptrica II. 4., 5., 6. p.

IB irányban üvegből jut a levegőbe, *BA* irányba, és ha *LB* irányból jön, *KB*-ba töretik meg.[1]

A fény törése általában úgy történik, hogy AH-nak IG-hez való viszonya, vagy KM-nek LN-hez való viszonya állandó s a két közegben a terjedési sebességek viszonyával egyenlő.[2] Mindennek igazsága különben DESCARTES szerint is kisérletekkel igazolandó,[3] s maga DESCARTES construál is egy erre a czélra szolgáló kisérleti berendezést.[4]

5. *A felvetett kérdés eldöntése.* Ide vonatkozó dolgozataimban[5] rámutattam, hogy DESCARTES physikai munkásságát s physikai rendszerének elveit s alaptételeit az ő kortársai, sőt még az újabb kor physikusai és philosophusai is több oldalról félreértették vagy félremagyarázták. Es amily kétségtelen, hogy a physika története nem mindig és nem mindenben igazságos DESCARTES physikai munkássága iránt, épp olyan bizonyos az is, hogy a physika történetének egyik-másik irója által felhozott s a dolgozat bevezető részében megismertetett állítások és adatok útján nem lehet megnyugtatóan megállapitani azt a tényt, hogy DESCARTES a fénytörés törvényének megalkotásában hallgatólagosan SNELL idevonatkozó eredményére támaszkodott volna. A physikusoknak egyik csoportja részéről ez utóbbi kérdésben hangoztatott vád s ezzel kapcsolatban a fénytörés törvényének megállapitásában a prioritás ügye is, az eddigi alapon, a physika történetének megoldatlan kérdése maradt. Ha ennek az eléggé kényes természetű ügynek elbirálásában attól a mély erkölcsi vonatkozástól eltekintünk is, hogy benne és általa egy olyan férfiúnak tudományos reputatiójáról van szó, ki szellemi munkásságának eredményei

[1] Descartes: Dioptrica II. 6., 7., 9. p.

[2] Descartes: Dioptrica II. 6., 8. p.

[3] Descartes: Dioptrica II. 8. p.

[4] Descartes: Epistolæ II. LXX.

[5] *Descartes mechanikájának alaptételei,* az Athenæum 1905. évfolyamának 3. és 4. számában. *Descartes világrendszere,* az Athenæum 1912. évfolyamának 2—3. számában.

által nevét több tudománykörben is halhatatlanná tette és ezt a nevet egyéb alkotásai mellett egy aránylag kisebb jelentőségű tudományos sikerért a plagium gyanújába burkoltatni bizonyára nem akarhatta: ez a komoly kérdés az elmondottak után kétségbevonhatatlanul eldönthető Descartes physikai rendszeréből vett belső vonatkozások, belső érvek által is.

Mert azoknak a különleges feltételeknek jogosultságát sem tévén ezuttal közelebbi birálat tárgyává, a melyeknek alapúl vétele mellett Descartes a fénytörés törvényét megállapitja, a felvetett kérdés megoldásában döntő jelentőségű érvnek kell tekintenünk azt a kétségtelen tényt, hogy Descartes fénytörési törvényének megállapítása szorosan csatlakozik egész physikai rendszeréhez s mint annak egyik alkotó eleme szervesen beleilleszkedik a rendszernek abba a keretébe, melyet Descartes az ő physikájának jellegzetes alaptételeivel construált meg.

Miként láttuk, Descartes egész physikai rendszerének alapját az a tétele képezi, hogy *az összes természeti tünemények oka mozgás*. Ehhez az alaptételhez való szigorú következetességgel a fénytünemények előidézőjét is mozgásnak, a második anyag alkatelemei mozgásának tételezi fel, ámbár sem elméletileg igazolni, sem kisérletileg demonstrálni nem tudja, hogy a fény lényege tényleg mozgás volna. Descartes ezzel, a korát megelőző felfogásával, melylyel a természeti tünemények lényegére vonatkozó elméletét egységes alapra fektette, mely felfogás az ő physikáját elődei és kora természettanától ilyen classikusan megkülönbözteti, még egészen egymagában áll. Az ő egységes alapon nyugvó physikájának aztán az egész Descartes-féle rendszerrel harmonizáló alkotását a fényterjedés tana s ennek keretén belől éppen a fény visszaverődése és törése s ezek törvényszerűsége képezvén, az utóbbiakra vonatkozó tétel már csak ebből az általános, de Descartes physikájának mélyéről vett okból és nézőpontból következtetve sem lehet idegenből kölcsönzött alkotás.

Descartes physikájának tanítása szerint továbbá *üres tér* *és közvetetlen távolba hatás nem lévén*, azok a testek, melyek valamely külső erő által megmozdittatnak, pályájukon *egyenes irányban* haladnak mindaddig, míg más testbe vagy testekbe nem ütköznek, mikor is mozgásukat részben vagy egészben a megütött testre vagy testekre ruházzák át s e közben rájok nyomást gyakorolnak. Ütközés és ezzel kapcsolatos nyomás után közvetíttetnek s terjednek tehát tovább a mozgások s az ezek által létrehivott különböző természeti tünemények is. E felfogáshoz híven a fénysugár is, mint geometriai fogalom s mint az az irány, melyben a DESCARTES-féle második anyag elemeinek a mozgása tovább terjed, *egyenes vonal*. Az egyenes vonalak irányában terjedő fénymozgás aztán, ha új közeg határfelületéhez ér, a rugalmas golyók ütközési törvényei szerint verődik vissza az új felületről, illetőleg hatol be az új közegbe, ha az utóbbi átlátszó. Így hát a visszaverődés és a törés tüneménye, az üres tér és a közvetetlen távolba hatás lehetőségének elvetése mellett, a rugalmas golyók analog tüneménye alapján értelmezhető. Mindezekből aztán világosan megállapitható az a szerves, belső kapcsolat, mely egyfelől DESCARTES fénytanában a törés és a visszaverődés tüneménye és másfelől a DESCARTES-féle általános physika alaptételei között fennáll. De ezekből kétségtelenül következik az is, hogy a rugalmas golyók elemi ütközési törvényszerűségének ismeretével DESCARTES-nak, a nagy stilű geometrának nem kellett idegen segítséghez folyamodnia a fényvisszaverődés és fénytörés geometriailag értelmezett egyszerű törvényének megállapitására.

Ezekből a belső csatlakozásokból, melyek egyfelől DESCARTES physikájának általános tantételei, másfelől viszont az ő fénytani törvényeinek alapgondolata között fennállanak, valamint abból az egységes felfogásból és összhangból is, mely az ő physikájának egyes alkotórészeit egy egésszé egybefoglalja, nemcsak megnyugvással, hanem joggal is következtethetünk arra, hogy a fénytörés törvénye DESCARTES-nak önálló és másoktól független alkotása.

A mi ezek után végre a fénytörés törvényének megalkotásában a prioritás kérdését illeti, ha minden kétségeskedés és utógondolat nélkül hiszünk is Voss és Huygens ama nyilatkozatában, hogy Snell-nek a fénytörés törvényét tartalmazó kéziratát látták, annak daczára is a gyakorlati szempontból helyes közfelfogásnak megfelelően az elsőbbség jogosan és feltétel nélkül a publicátort, ebben a kérdésben Descartes-ot illeti meg.

Ellend József.

A VÍZ DIFFUZIO EGYÜTTHATÓJÁNAK MEGHATÁROZÁSA KAUCSUKBAN.

1. A következő dolgozat tárgya a víz diffuzio együtthatójának meghatározása a kaucsukban. A víz diffuzioját kaucsukon át észlelték R. A. Lundie és Payen, a nélkül, hogy a diffuzio együtthatót megmérték volna; e diffuzio együttható méréséről tudtommal csak Tangl Károly tanár a kapillaritásra vonatkozó dolgozatában van szó.[1] A meghatározásra a következő jelenséget használhatjuk fel. Egy körülbelül 10 cm. hosszú, egyik végén zárt kaucsukcső nyitott végével egy kapillaris csőhöz illeszkedjék, úgy hogy a kapillaris cső belseje a kaucsukcső belsejével közlekedjék. A kaucsukcsővet töltsük meg vízzel, a mely benyúlik a kapillaris csőbe. A kaucsukcső térfogatának változását a kapillárisban lévő folyadékszál eltolódása jelzi. A kaucsukcső így vízzel töltve álljon száraz levegőben. A folyadékszál bizonyos idő mulva egyenletes járást mutat; tegyük most a csövet vízgőzzel telitett levegőbe, úgy hogy a cső külső felülete vízgőzzel jőjjön érintkezésbe. A folyadékszál hirtelen elmozdul, behúzódik, ez a behúzódás néhány nap mulva ismét egyenletes lesz. A folyadékszál e behúzódását a víz abszorpcziójának és az ezzel járó térfogatváltozásnak tulajdoníthatjuk. Ebből Tangl tanár meghatározta a diffuzio együtthatót, a vékony kaucsukréteget első közelitésben két sik felület által határolt rétegnek tekintve.

A dolgozatában említi, hogy a szigorú számítást Bessel-féle henger-függvények segélyével lehet elvégezni. A kisérleteknek

[1] K. Tangl: Ann. d. Phys. 4. Folge 34 1911 p. 311—342.

a vázolt irányban folytatásával TANGL tanár engem bízott meg. A leírt jelenség még szembeötlőbb, ha a kaucsukcsövet száraz levegőből vízbe mártjuk; kisérleteimet így végeztem.

A kisérlet elmélete.

2. Legyen a kaucsukcső belsejében víz, a mely diffundál a kaucsuk falán keresztül, a külső felülete pedig legyen száraz levegővel körülvéve. Legyen a víz sűrűsége a kaucsuk falában σ; ez a sűrűség a tengelytől egyenlő távolságban lévő helyeken ugyanaz. σ tehát csak a tengelytől számitott távolságtól r-től s az időtől t-től függ és a következő differencziálegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

ha az x tengely a cső tengelyében fekszik és k, a diffuzio együttható, a σ sűrűségtől független szám.

Henger koordinátákat vezetve be az (1) egyenletbe, az a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right). \tag{2}$$

Legyen r_1 a henger belső, r_2 a külső sugara s írjunk r helyett r_1x-et, akkor mint látható, a mikor $r = r_1$ az $x = 1$ s a mikor $r = r_2$ akkor $x = \frac{r_2}{r_1} \equiv x_1$. Ez átalakítással a differencziálegyenletünkből lesz:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right), \tag{3}$$

a hol $\mu = \frac{k}{r_1^2}$.

Ha a cső külső falát folyton száraz levegővel gondoljuk körülvéve, a cső belsejéből víz áramlik kifelé. Igen hosszú idő mulva az áramlás az időben változatlan lesz, azaz

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0.$$

A differencziálegyenletünk alakja akkor

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial^2 x} + \frac{1}{x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Felvesszük, hogy a külső határfelületen ($x = x_1$) $\sigma = 0$, a belső határfelületen ($x = 1$) $\sigma = \sigma_1$. Ezt tekintetbe véve a differencziálegyenlet megoldása

$$\sigma = -\frac{\sigma_1}{lnx_1} ln \frac{x}{x_1}.$$

Miután a fenti staczionárius állapot beállott, hozzuk a kaucsukhenger külső felületét is vizzel érintkezésbe. A diffuzio ismét (3) alatti egyenlet szerint megy végbe, de mások lesznek a határfeltételek. Keresnünk kell tehát a (3) alatti differencziálegyenlet megoldását, vagyis egy oly σ függvényt, mely eleget tesz az egyenletnek, s a következő kezdő és határfeltételeknek:

$$\sigma = -\sigma_1 \frac{ln \frac{x}{x_1}}{lnx_1}$$

minden x-re, a mikor $t = 0$. Minden $t > 0$-ra pedig áll, hogy mikor $x = 1$, akkor $\sigma = \sigma_1$, a mikor pedig $x = x_1$, akkor σ szintén σ_1.

Differencziálegyenletünket próbáljuk kielégiteni a következő függvénynyel: $\sigma = Ce^{-\mu m^2 t} f(x)$, hol C és m^2 állandók. Az egyenletbe helyettesítve σ ezen értékét, azt kapjuk, hogy $f(x)$-nek a következő egyenletet kell kielégítenie:

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + m^2 f(x) = 0. \tag{4}$$

Írjunk x helyébe $\frac{z}{m}$-et; és $f\left(\frac{z}{m}\right)$-et jelöljük $\varphi(z)$-vel, akkor (4)-ből lesz:

$$\varphi''(z) + \frac{1}{z}\varphi'(z) + \varphi(z) = 0. \tag{5}$$

Az általános BESSEL-féle differencziálegyenlet alakja:

$$y'' + \frac{1}{z} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0.$$

(5) tehát specziális BESSEL-féle differencziálegyenlet általános megoldása:

$$A_\nu I_\nu(z) + B_\nu Y_\nu(z),$$

a hol $I_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ első, ill. másodfajú BESSEL-féle függvények. Jelen esetben $\nu = 0$, s mivel az én számításaimban a z egynél nagyobb, czélszerűbb $I_0(z)$, $Y_0(z)$ következő szemikonvergens sorsfejtését használni:

$$I_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_0(z) \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(z) \cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$Y_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P_0(z) \cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + Q_0(z) \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

a hol

$$P_0(z) = 1 - \frac{1^2.3^2}{2!(8z)^2} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{4!(8z)^4} - \frac{1^2.3^2 \cdots 11^2}{6!(8z)^6} - + \cdots$$

$$Q_0(z = -\frac{1}{8z} + \frac{1^2.3^2.5^2}{3!(8z)^3} - \frac{1^2.3^2 \cdots 9^2}{5!(8z)^5} + \cdots$$

Az (5) alatti egyenletünk általános megoldása ezek szerint

$$A I_0(mx) + B Y_0(mx),$$

a hol A és B tetszőleges állandók. Így tehát

$$\sigma = e^{-\mu m^2 t} \left(A I_0(mx) + B Y_0(mx) \right)$$

a (3) alatti differencziálegyenlet megoldása. Akárhány ilynemű tag összege ugyancsak megoldás lesz. Ezért feladatunk megoldását és a kezdő- és határfeltételek kielégítését ily alakban keressük:

$$\sigma = \sigma_1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} e^{-\mu m_\lambda^2 t} \left(A_\lambda I_0(m_\lambda x) + B_\lambda Y_0(m_\lambda x) \right), \tag{6}$$

mely sor, ha konvergens, ugyancsak megoldás lesz. Az m_λ A_λ B_λ állandókat már mostan úgy kell meghatároznunk, hogy a kezdő-és határfeltételek kielégítést nyerjenek. Kezdő feltételünk szerint, ha $t=0$, akkor

$$\sigma = -\sigma_1 \frac{lnx - lnx_1}{lnx_1} = \sigma_1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda \left(A_\lambda I_0(m_\lambda x) + B_\lambda Y_0(m_\lambda x)\right) \quad (7)$$

azaz kell, hogy

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(A_\lambda I_0(m_\lambda x) + B_\lambda Y_0(m_\lambda x)\right) = -\sigma_1 \frac{lnx}{lnx_1} \quad (8)$$

legyen.

Kell továbbá, hogy a mikor $x=1$ $\sigma=\sigma_1$ legyen minden t értékre, vagyis (6)-ból, hogy

$$A_\lambda I_0(m_\lambda) + B_\lambda Y_0(m_\lambda) = 0. \quad (9)$$

legyen; azonkívül, ha $x=x_1$ $\sigma=\sigma_1$ legyen szintén minden $t>0$ értékre, azaz hogy

$$A_\lambda I_0(m_\lambda x_1) + B_\lambda Y_0(m_\lambda x_1) = 0. \quad (10)$$

A két utóbbi feltételből:

$$I_0(m_\lambda)\, Y_0(m_\lambda x_1) - I_0(m_\lambda x_1)\, Y_0(m_\lambda) = 0 \quad (11)$$

x_1 értéke a cső méreteivel adva lévén, ezen egyenletből számitandók az m_λ értékek, melyeket szolgáltat a következő sorfejtés:

$$m_\lambda = \beta - \frac{p}{\beta} + \frac{q-p^2}{\beta^2} - \frac{r-4pq+2p^3}{\beta^5} + \ldots$$ [1]

a hol

$$\beta = \frac{\lambda\pi}{x_1-1};\ p = -\frac{1}{8x_1};\ q = \frac{100\,(x_1^3-1)}{3\,.\,(8x_1)^3\,(x_1-1)}$$

$$r = \frac{-32\,.\,1073\,.\,(x_1^5-1)}{5\,.\,(8x_1)^5\,(x_1-1)}$$

$$\lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

x_1 értéke a használt csöveken 1·263, ezzel az m_λ értékek:

---

[1] A. Kalähne: Zeitschr. für Math. u. Phys. 54. 1907. I. H.

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_λ	11·937	23·886	35·833	47·779	59·724	71·670	83·615	95·561	107·506	119·451

3. Most még az $A_\lambda B_\lambda$ együtthatók meghatározása végett a (8) egyenlet mindkét oldalát szorozzuk

$$x\,[A_{\lambda'} I_0 (m_{\lambda'} x) + B_{\lambda'} Y_0 (m_{\lambda'} x)]$$

kifejezéssel, [$m_{\lambda'}$ a (11) egyenlet gyökeinek valamelyike lévén] s integráljuk 1 és x_1 határok közt, tehát

$$-\frac{\sigma_1}{lnx_1}\int_1^{x_1} xlnx\,[A_{\lambda'} I_0 (m_{\lambda'} x) + B_{\lambda'} Y_0 (m_{\lambda'} x)]\,dx =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty}\int_1^{x_1} x\,[A_\lambda I_0 (m_\lambda x) + B_\lambda Y_0 (m_\lambda x)]\,[A_{\lambda'} I_0 (m_{\lambda'} x) + \qquad (12)$$
$$+ B_{\lambda'} Y_0 (m_{\lambda'} x)]\,dx.$$

A jobboldali integrál, vagyis az

$$\int_1^{x_1} [A_\lambda I_0 (m_\lambda x) + B_\lambda Y_0 (m_\lambda x)]\,[A_{\lambda'} I_0 (m_{\lambda'} x) + B_{\lambda'} Y_0 (m_{\lambda'} x)]\,dx \qquad (13)$$

értéke, figyelembe véve a (9) (10) alatti egyenleteket, zérus, ha $\lambda \gtrless \lambda'$ (l. P. Schafheitlin: Theorie der. Besselschen Funktionen 68. p.)

A mikor $\lambda = \lambda'$, (13) átmegy a következő integrálba:

$$\int_1^{x_1} x\,[A_\lambda I_0 (m_\lambda x) + B_\lambda Y_0 (m_\lambda x)]^2\,dx \qquad (14)$$

s értéke

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x_1^2}{2}[A_\lambda I_1 (m_\lambda x_1) + B_\lambda Y_1 (m_\lambda x_1]^2 - \\ &- \frac{1}{2}[A_\lambda I_1 (m_\lambda) + B_\lambda Y_1 (m_\lambda)]^2,\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

a hol

$$I_1 (m_\lambda x_1) = - I_0' (m_\lambda x_1)\,^1$$
$$Y_1 (m_\lambda x_1) = - Y_0' (m_\lambda x_1),$$

I_0', Y_0' az argumentum szerinti differencziálhányad[illegible] jelölvén.

[1] L. P. Schafheitlin: Theorie d. Besselschen Funktionen. [illegible]. p.

Látjuk tehát ezek szerint, hogy ha a (8) alatti sor tagjait szorozzuk $x\,[A_{\lambda'}(m_{\lambda'}x)+B_{\lambda'}Y_0(m_{\lambda'}x)]$-el és integráljuk, csak egy tag marad meg, az a tag, a melynek a λ-ja egyenlő λ'-vel; és ennek értékét (15) adja.

4. Meghatározandó még a (12) alatti egyenlet baloldalán szereplő

$$\frac{-\sigma_1}{lnx_1}\int_1^{x_1} xlnx\,[A_{\lambda'}I_0(m_{\lambda'}x)+B_{\lambda'}Y_0(m_{\lambda'}x)]\,dx$$

integrál értéke. A beszorzást elvégezve következő integrálokhoz jutunk:

$$\int_1^{x_1} xlnxI_0(m_{\lambda'}x)\,dx$$

$$\int_1^{x_1} xlnxY_0(m_{\lambda'}x)\,dx.$$

Hogy ezeknek az integráloknak az értékét kiszámíthassuk, vegyük figyelembe, hogy

$$\int xI_0(x)\,dx=xI_1(x).\,[1]$$

Ennek az integrálnak figyelembe vételével integráljuk partialisan $\int_1^{x_1} xlnxI_0(mx)\,dx$-et.

$$\int_1^{x_1} xlnxI_0(mx)\,dx=\left[\frac{x}{m}\,lnxI_1(m_\lambda x)\right]_1^{x_1}-\frac{1}{m}\int_1^{x_1} I_1(m_\lambda x)\,dx.$$

Figyelembe véve, hogy

$$-I_1(m_\lambda x)=I_0'(m_\lambda x):$$

$$\int_1^{x_1} xlnxI_0(m_{\lambda'}x)\,dx=\frac{x_1}{m_\lambda}\,lnx_1I_1(m_\lambda x_1)+ \qquad (16)$$
$$+\frac{1}{m_\lambda^2}I_0(m_\lambda x_1)-\frac{1}{m_\lambda^2}I_0(m_\lambda).$$

[1] P. SCHAFHEITLIN: Die Theorie der Besselschen Funktionen p. 64. (3).

Ugyanily modon

$$\int_1^{x_1} x\ln x Y_0(m_\lambda x)\,dx = \frac{x_1}{m_\lambda}\ln x_1 Y_1(m_\lambda x) + \\ + \frac{1}{m_\lambda^2} Y_0(m_\lambda x_1) - \frac{1}{m_\lambda^2} Y_0(m_\lambda). \tag{17}$$

A (16), (17), (8), (11) alatti egyenletek figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$-\frac{\sigma_1}{\ln x_1}\int_1^{x_1} x\ln x\,[A_\lambda I_0(m_\lambda x) + B_\lambda Y_0(m_\lambda x)]\,dx = \\ = -\frac{\sigma_1}{m_\lambda} x_1 [A_\lambda I_1(m_\lambda x_1) + B_\lambda Y_1(m_\lambda x_1)]. \tag{18}$$

5. Következő egyenletünk van tehát A_λ és B_λ meghatározására:

$$-\frac{\sigma_1 x_1}{m_\lambda}[A_\lambda I_1(m_\lambda x_1) + B_\lambda Y_1(m_\lambda x_1)] = \\ = \frac{x_1^2}{2}[A_\lambda I_1(m_\lambda x_1) + B_\lambda Y_1(m_\lambda x_1)]^2 - \\ - \frac{1}{2}[A_\lambda I_1(m_\lambda) + B_\lambda Y_1(m_\lambda)]^2. \tag{19}$$

Vegyük számba, hogy (10)-ből

$$B_\lambda = -\frac{I_0(m_\lambda x_1)}{Y_0(m_\lambda x_1)} A_\lambda \equiv - g_\lambda A_\lambda, \tag{20}$$

tehát (19)-ből

$$m_\lambda A_\lambda = \frac{2x_1\sigma_1 [I_1(m_\lambda x_1) - g_\lambda Y_1(m_\lambda x_1)}{[I_1(m_\lambda) - g_\lambda Y_1(m_\lambda)] - x_1^2 [I_1(m_\lambda x_1) - g_\lambda Y_1(m_\lambda x_1)]^2}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$Z_1 = I_1(m_\lambda) - g_\lambda Y_1(m_\lambda), \quad Z_{x_1} = I_1(m_\lambda x_1) - g_\lambda Y_1(m_\lambda x_1),$$

úgy ezekkel:

$$m_\lambda A_\lambda = \frac{2x_1\sigma_1 Z_{x_1}}{Z_1^2 - x_1^2 Z_{x_1}^2},$$

míg B a (20)-ból adódik. Ezzel a (3) alatti differencziálegyenletet megoldottuk.

6. (1)-ben említettem, hogy ha a vízzel telt kaucsukcső száraz levegőből vízbe jut, a cső belsejével összeköttetésben levő kapillaris csőben a folyadékszál visszahúzódik. Ezt két tényező okozza: 1. a cső belsejéből víz diffundál e cső falába s ennek következtében a cső belsejében levő vízmennyiség fogy, 2. a cső belsejéből és a külső térből víz diffundálván a cső falába, az abban abszorbeált víz mennyisége megváltozik, a mi szintén okozhat térfogatváltozást.

A cső belsejéből tehát a cső belső határfelületén át a cső falába diffundált összes vízmennyiség legyen Q_1. Ha a cső külső határfelületén át a cső falába diffundált összes víz mennyisége $-Q_2$, akkor a cső falában foglalt vízmennyiség összes változása, tehát az abszorbeált vízmennyiség $Q_1 - Q_2$. Ha az abszorbeált víz által okozott térfogatváltozást első közelítésben arányosnak vesszük az absorbeált víz mennyiségével, akkor a folyadékszál eltolódása q számítva a kisérlet kezdetétől, mikor vízzel jutott érintkezésbe a cső

$$q = c_1 Q_1 - c_2 (Q_1 - Q_2).$$

A diffuzio törvénye alapján

$$Q_1 = -2\pi r_1 k \int_0^t \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)_{r=r_1} dt, \quad Q_2 = -2\pi r_2 k \int_0^t \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\right)_{r=r_2} dt.$$

Q_1 és $(Q_1 - Q_2)$ értékét ezekből kiszámíthatjuk felhasználva $m_\lambda A_\lambda$ és B_λ értékeit.

Az eredmény a következő alakban jelentkezik

$$q = u - yF_\lambda + \eta G_\lambda, \tag{21}$$

ahol $u\ y\ \eta$ az időt nem tartalmazzák.

$$F = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{n_\lambda^2} (x_1 - 1)^2 \frac{Z_1 Z_{x_1}}{Z_1^2 - x_1^2 Z_{x_1}^2} z^{n_\lambda^2 t}$$

$$G = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{n_\lambda^2} \frac{Z_{x_1}(x_1-1)}{Z_1+x_1^0 Z_{x_1}} z^{n_\lambda^2 t}$$

$$n_\lambda = \frac{x_1-1}{\pi} m_\lambda \qquad z = e^{-k\frac{\pi^2}{(r_2-r_1)^2}}.$$

A mint látható a diffuzio együttható k csak F és G-ben szerepel z révén; u, y η, sem a diffuzio együtthatót, sem az időt nem tartalmazzák.

Mielőtt a diffuzio együtthatónak az észlelésekből a (21) segélyével való kiszámítására térnék, czélszerű lesz a kisérleti berendezést részletesebben leírni.

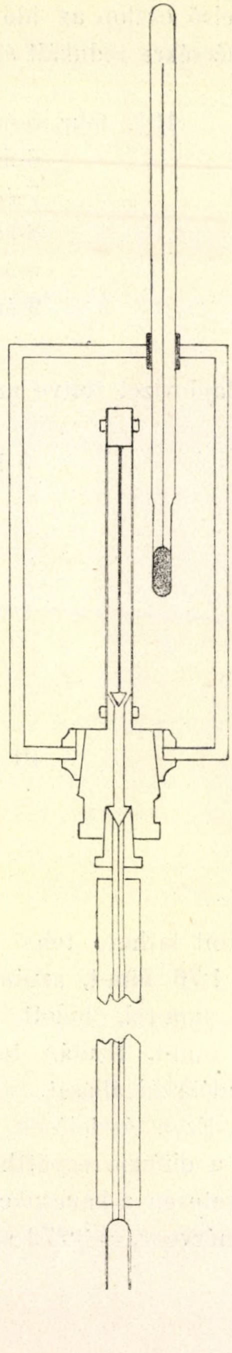
A kisérlet berendezése.

7. Az én kisérleti berendezésem ugyanolyan, mint a milyent Tangl tanár említett értekezésében ismertetett. Egy körülbelül 12 cm hosszú, 8 mm széles sárgaréz-lécz két végéhez két henger volt forrasztva, a mely hengerek alapkörének átmérője ugyanakkora volt, mint a lécz szélessége. Az egyik henger konushoz volt forrasztva. A konus tengelye mentén át volt fúrva és ez a furat folytatódott a henger két kis furatában, a melyek közül az egyik a lécz egyik, a másik a lécz másik oldalára nyilik. Erre a léczre húztam a kaucsukcsövet. A lécz a cső belső terét két egymással közlekedő részre osztotta. A kaucsukcsövet vékony dróttal a hengeren levő mélyedésbe nyomtam, úgy hogy annak belső tere a külső tértől teljesen el volt zárva. A konusba egy kapillaris cső illeszkedett, a melynek belseje a konuson és a hengeren levő furatokon át közlekedett a kaucsukcső belsejével. A kaucsukba vizet töltök s a konusba erősitem a vízzel telt kapillaris csövet, úgy hogy levegőbuborék ne maradjon benne. Az így vízzel töltött kaucsukcsövet egy négyszögletes üvegedénybe helyeztem, annak egyik vertikalis falán keresztül, a melynek belsejében a levegőt klorkalcziummal száritottam. Az üvegedényt fémedény vette körül, hogy a folyadékszál járását nagyobb hőmérsékleti ingadozások

ne zavarják. Ugyanezen czélból az edény pinczében állott. A hőmérsékletet az edénybe helyezett hőmérő mérte. A folyadékszál állását a kapillaris csőben pedig a csőhöz erősített aluminiumskálán olvashattam le mikroskoppal.

A kisérlet kivitele.

8. A míg a cső száraz levegőben állott, a folyadékszál állását minden nap feljegyeztem mindaddig, a míg annak járása staczionárius lett. Azután meghatároztam a hőmérsékleti együtthatót, vagyis hogy 1° hőemelkedésre mennyivel tolódik el a folyadékszál. Ezen czélból a levegő hőmérsékletét 3—4 fokkal emeltem s legalább egy óráig állandó magasságon tartottam, észlelve közben a folyadékszál állását. Ezzel az együtthatóval történt az észlelések redukcziója állandó hőmérsékletre. A közlendő táblázatok már a redukált állásokat adják. Ez együttható meghatározása után még néhány napig figyeltem a folyadékszál járását. Ha a napi járások igen kicsiny különbséget mutattak, az üvegedénybe vizet töltöttem, úgy, hogy a víz a kaucsukcsövet teljesen ellepte. A víz betöltése után a folyadékszál a hidrosztatikai nyomás folytán előre halad, aztán megfordul és visszahúzódik és pedig sokkal gyorsabban, mint előbb, a mint az az alábbi táblázatból kitűnik.



1. ábra.

Az első oszlop az időt, a második a folyadékszál ugyanazon hőmérsékre redukált állásait tartalmazza.

1912 febr. 5-én	9	h.	33	m	344·00	mm.
6-án	9	«	19	«	342·64	«
7-én	9	«	15	«	341·26	«
8-án	9	«	12	«	339·88	«
9-én	9	«	0	«	338·60	«
9-én	9	«	20	«	338·64	«

Majd vizet töltve az edénybe a folyadékszál állása:

9 h.	25	m	340·40	mm.
	30	«	340·28	«
	35	«	339·91	«
	40	«	339·73	«
	45	«	339·53	«
	50	«	339·44	«
	55	«	339·34	«
	60	«	339·28	«
10 h.	5	«	339·18	«
	10	«	339·08	«
	15	«	339·04	«
	20	«	338·98	«

Mint látható tehát a szál a víz betöltése után előre haladt 1·76 mm-t, azután visszahúzódik s pedig 55 percz alatt 1·42 mm-rel, holott az előző napokban 1 nap alatt járt 1·38 mm-t. Ezután több napon át, minden nap leolvastam a folyadékszál állását.

9. Ezen észlelések alapján kell q kifejezéséből (21) számítani a diffuzio együtthatót k-t. A számításhoz ismerni kell természetesen a kaucsukcső külső és belső sugarát. Mikrometerrel mérve $r_1 = 3{\cdot}272$ mm, $r_2 = 4{\cdot}132$ mm s ezekből $x_1 = 1{\cdot}263$.

Ezek alapján

$$F = 1{\cdot}0027\, z^{0{\cdot}9986t} - \frac{1{\cdot}0006}{4} z^{3{\cdot}9986t} + \frac{1{\cdot}0002}{9} z^{8{\cdot}9988t} -$$

$$- \frac{1{\cdot}001}{16} z^{15{\cdot}9989t} + \frac{1{\cdot}001}{25} z^{24{\cdot}999t} - \frac{1}{36} z^{36t} + \dots$$

$$G = 1{\cdot}0025\, z^{0{\cdot}9986t} - \frac{0{\cdot}1162}{4} z^{3{\cdot}9986t} + \frac{1{\cdot}0002}{9} z^{8{\cdot}9988t} -$$

$$- \frac{0{\cdot}1162}{16} z^{15{\cdot}9989t} + \dots$$

a q-t szolgáltató

$$q = u - yF + \eta G$$

egyenletben. Mint ismeretlenek szerepelnek u, y, η, lineárisan, k pedig csak F és G-ben z révén, elég komplikáltan.

Minden egyes leolvasás q egy-egy értékét szolgáltatja t meghatározott értékére. A számításhoz q ama értékeit használtam, a melyek $t = 1, 2, 3, \dots$ napra vonatkoznak, tehát a folyadékszál állását 1, 2, 3, ... nappal a feltöltés után. Négy ily észlelésből a négy ismeretlen u, y, η és k értéke már kiszámítható. Az észlelések számának növelésével több egyenletet kapunk, mint az ismeretlenek száma. Valamennyi észlelés felhasználásával u, y, η és z-nek ama értékeit számítottam, a melyekkel a hiba-négyzetek összege a legkisebb lett.

Ha tehát $t = t_1, t_2, t_3 \dots$ időhöz tartozó értékek rendre $q_1, q_2, q_3, \dots F_1, F_2, F_3, \dots, G_1, G_2, G_3 \dots$, úgy u, y, η és z meghatározására a következő egyenleteink vannak:

$$\begin{aligned} q_1 &= u - F_1 y + G_1 \eta \\ q_2 &= u - F_2 y + G_2 \eta \\ &\vdots \\ q_n &= u - F_n y + G_n \eta. \end{aligned}$$

Ha $n > 4$, u, y, η és z nem határozhatók meg úgy, hogy valamennyi egyenlet pontosan kielégíthessék. Ekkor u, y, η és z ama érték csoportját választottam, melyre

$$\sum_{m=1}^{n} (q_m - u + F_m y - G_m \eta)^2$$

hiba négyzetek összege minimum lesz. Ez a feltétel a következő négy egyenletet szolgáltatja u, y, η és z meghatározására:

$$\begin{aligned} nu - \Sigma F_m y + \Sigma G_m \eta &= \Sigma q_m \\ -\Sigma F_m u + \Sigma F_m^2 y - \Sigma F_m G_m \eta &= -\Sigma q_m F_m \\ \Sigma G_m u - \Sigma F_m G_m y + \Sigma G_m^2 \eta &= \Sigma G_m q_m \end{aligned} \qquad (22)$$

$$\sum_m (q_m - u + F_m y - G_m \eta)\left(\frac{dF_m}{dz} y - \frac{dG_m}{dz} \eta\right) = 0.$$

Az első három egyenlet u, y, η-ban lineáris, ha tehát z megvan határozva u, y, η könnyen kiszámíthatók. Ezért úgy jártam el, hogy z helyébe különböző értékeket írtam és z különböző értékeire meghatároztam az u, y, η constansok értékét a (22) egyenletrendszer első három egyenletéből, azután kiszámítottam a hiba négyzetek összegét. A mely z értéknél a legkisebb a hiba négyzetek összege, annak megfelelő u, y, η és z constansok szolgáltatják (22) megoldását és ezzel a keresett értékeket.

Ily módon járva el pl. az 1911 január havában végzett kisérletek a következő formulával állíthatók elő úgy, hogy a hiba négyzetek összege minimum legyen.

$$\begin{aligned} q = 338{\cdot}764 - 274{\cdot}722\,[1{\cdot}0027 z^{0{\cdot}9986t} \ldots] - \\ - 93{\cdot}355\,[1{\cdot}0025 z^{0{\cdot}9986t} \ldots] \end{aligned}$$

a hol $z = 0{\cdot}946$.

Hogy z ezen értékénél tényleg minimum van, kitűnik a következő táblázatokból, a hol az első oszlop az időt adja napokban azon pillanattól, a melyben a kaucsukcső külső felülete is vízzel érintkezett. A második a folyadékszál leolvasott állásait $t = 0$-tól számítva. A harmadik pedig a folyadékszálnak fenti formula alapján számitott állásait.

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·34	26·38	— 0·04	0·002
2	41·46	41·38	+ 0·08	0·006
3	54·84	54·82	+ 0·02	0·000
4	67·32	67·41	— 0·09	0·008
5	79·49	79·45	+ 0·04	0·002
			+ 0·01	0·018

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·34	26·34	0·00	0·000
2	41·46	41·42	0·04	0·002
3	54·84	54·85	— 0·01	0·000
4	67·32	67·41	— 0·09	0·008
5	79·49	79·43	+ 0·06	0·004
			0·00	0·014

$z = 0{\cdot}947$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·34	26·37	— 0·03	0·001
2	41·46	41·39	+ 0·07	0·005
3	54·84	54·82	+ 0·02	0·000
4	67·32	67·41	— 0·09	0·008
5	79·49	79·46	+ 0·03	0·001
			— 0·01	0·015

10. A számitásra legelőnyösebben az első néhány napokban végzett észlelések használhatók fel, a mikor a szál járása még számottevően eltér a staczionárius járástól. Indokoltá teszi ezt még a következő körülmény is. Ha a folyadékszál behúzódását csak a diffuzio okozza, a vízbe merülő kaucsukcsővel a folyadékszál járásának idővel teljesen meg kell szűnie. Tényleg azonban még a 25-ik napján jelentékeny járást mutat. A diffuzion és az abszorpczióval járó térfogatváltozáson kívül még valami lassú szerkezeti változást kell felvennünk, mely szintén térfogatváltozással jár. Ezt a lassú szerkezeti változást első közelitésben az idővel arányosnak vehetjük fel.

S minthogy kezdetben az F is arányosan változik a t-vel, a mint az az alábbi táblából látható, a q kifejezésében a szerkezetbeli lassú változás csak az F együtthatójának értékét változtatja meg, míg a diffuzio együtthatóét nem. A $z = 0{\cdot}946$-hoz tartozó F értékeket a következő táblázatokba foglaltam, a hol az első oszlop az időt adja napokban a feltöltés pillanatától számítva, a harmadik két egymásután következő F közötti különbséget.

$z = 0·946$

t	F_n	Δ
1	0·797223	
		0·02782
2	0·769406	
		0·02782
3	0·741587	
		0·02781
4	0·713773	
		0·02781
5	0·685968	
⋮		

$z = 0·946$

t	F_n	Δ
19	0·346060	
		0·01813
20	0·327929	
		0·01726
21	0·310673	
		0·01641
22	0·294262	
		0·01559
23	0·278666	
		0·01481
24	0·263859	
		0·01405
25	0·249805	

Tehát a míg az F arányosan változik t-vel, addig a szerkezetbeli változás nem hamisítja meg a k értékét. F az első 5 napon belül elegendő pontossággal előállítható az

$$F_n = 0·82507 - 0·02782\ t$$

formula segélyével, míg már pl. a 10-ik napi F érték ezzel a a formulával számítva 0·54657, holott annak értéke a sorral számítva 0·54957. Tényleg 5 napi járással számítva pl. az 1911 júniusi és az 1912 januári sorozatokat, mind a két sorozat ugyanazt a k értéket eredményezi, mindkettőre $z = 0·945$; 10 értékkel számítva e két sorozat különböző k-t eredményez és pedig az 1911 júniusi $z = 0·903$, az 1912 januári $z = 0·93$, vagy pl. az 1911 januári sorozat 5 értékkel ugyanazt a k-t adja, mint az előbbi kettő, míg 10 értékkel $z = 0·94$-re még nem kaptam minimumot. Ezért a k értékének kiszámítására csak az első 5 napi észleléseket használtam fel. Így valamennyi sorozat igen jól egyező értékeket szolgáltat.

11. A következő táblázatok foglalják össze a mérések eredményeit:

1910 augusztus havi észlelési sorozat.

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	17·93	18·02	— 0·09	0·008
2	34·89	34·60	+ 0·29	0·084
3	48·68	48·73	— 0·05	0·003
4	61·19	61·60	— 0·41	0·168
5	73·92	73·66	+ 0·26	0·068
			+ 0·02	0·331

$z = 0{\cdot}947$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	17·93	18·05	— 0·12	0·014
2	34·89	34·57	+ 0·31	0·096
3	48·68	48·70	— 0·02	0·000
4	61·19	61·59	— 0·40	0·160
5	73·92	73·70	+ 0·22	0·048
			+ 0·01	0·318

$z = 0{\cdot}948$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	17·93	17·96	— 0·03	0·001
2	34·89	34·64	+ 0·25	0·063
3	48·68	48·79	— 0·11	0·012
4	61·19	61·62	— 0·43	0·185
5	73·92	73·60	+ 0·32	0·102
			0·00	0·363

A q értékek pedig a három z értékre:

$$q = 316{\cdot}742 - 202{\cdot}38212\, F - 137{\cdot}29562\, G.$$
$$q = 324{\cdot}194 - 213{\cdot}69685\, F - 135{\cdot}33569\, G.$$
$$q = 322{\cdot}489 - 198{\cdot}31298\, F - 145{\cdot}59718\, G.$$

1911 januáriusi sorozat.

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·34	26·38	— 0·04	0·002
2	41·46	41·38	+ 0·08	0·006
3	54·84	54·82	+ 0·02	0·000
4	67·32	67·41	— 0·09	0·008
5	79·49	79·45	+ 0·04	0·002
			+ 0·01	0·018

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·34	26·34	0·00	0·000
2	41·46	41·42	+ 0·04	0·002
3	54·84	54·85	— 0·01	0·000
4	67·32	67·41	— 0·09	0·008
5	79·49	79·43	+ 0·06	0·004
			+ 0·00	0·014

$z = 0{\cdot}947$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·34	26·37	— 0·03	0·001
2	41·46	41·39	+ 0·07	0·005
3	54·84	54·82	+ 0·02	0·000
4	67·32	67·41	— 0·09	0·008
5	79·49	79·46	+ 0·03	0·001
			— 0·01	0·015

$$q = 334{\cdot}214 - 270{\cdot}93473\, F - 92{\cdot}203436\, G.$$
$$q = 338{\cdot}764 - 274{\cdot}72225\, F - 93{\cdot}354717\, G.$$
$$q = 346{\cdot}734 - 287{\cdot}1098\, F - 91{\cdot}101428\, G.$$

1911 junius.

$z = 0{\cdot}944$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	14·63	14·55	+ 0·08	0·006
2	24·95	25·04	— 0·09	0·008
3	33·55	33·69	— 0·14	0·020
4	41·56	41·37	+ 0·19	0·036
5	48·41	48·45	— 0·04	0·002
			0·00	0·072

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	14·63	14·61	+ 0·02	0·000
2	24·95	24·98	— 0·03	0·001
3	33·55	33·64	— 0·09	0·008
4	41·56	41·37	+ 0·19	0 036
5	48·41	48·51	— 0·10	0·010
			— 0·01	0·055

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	14·63	14·59	+ 0·04	0·002
2	24·95	25·01	— 0·06	0·004
3	33·55	33·65	— 0·10	0·010
4	41·56	41·36	+ 0·20	0·040
5	48·41	48·50	— 0·09	0·008
			— 0·01	0·064

$$q = 177{\cdot}051 - 76{\cdot}580606\,F - 101{\cdot}838\,G.$$
$$q = 182{\cdot}419 - 86{\cdot}424\,F - 99{\cdot}13358\,G.$$
$$q = 184{\cdot}728 - 87{\cdot}8859\,F - 100{\cdot}0165\,G.$$

1911. november.

$z = 0{\cdot}944$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	11·84	11·76	+ 0·08	0·006
2	20·36	20·52	— 0·16	0·026
3	27·63	27·61	+ 0·02	0·000
4	33·94	33·85	+ 0·09	0·008
5	39·51	39·55	— 0·04	0·002
			— 0·01	0·042

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	11·84	11·80	+ 0·04	0·002
2	20·36	20·48	— 0·12	0·014
3	27·63	27·58	+ 0·05	0·003
4	33·94	33·85	+ 0·09	0·008
5	39·51	39·58	— 0·07	0·005
			— 0·01	0·032

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	11·84	11·78	+ 0·06	0·004
2	20·36	20·49	— 0·13	0·017
3	27·63	27·59	+ 0·04	0·002
4	33·94	33·85	+ 0·09	0·008
5	39·51	39·57	— 0·06	0·004
			0·00	0·035

$$q = 139{\cdot}225 - 45{\cdot}401\,F - 91{\cdot}596\,G.$$
$$q = 142{\cdot}974 - 51{\cdot}768\,F - 90{\cdot}083\,G.$$
$$q = 144{\cdot}861 - 53{\cdot}121\,F - 90{\cdot}672\,G.$$

1912. január.

$z = 0{\cdot}944$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	21·14	20·95	+ 0·19	0·036
2	33·63	34·13	— 0·50	0·250
3	44·64	44·39	+ 0·25	0·063
4	53·36	53·15	+ 0·21	0·044
5	60·79	60·95	— 0·16	0·026
			— 0·01	0·419

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	21·14	20·99	0·15	0·023
2	33·63	34·09	— 0·46	0·212
3	44·64	44·36	+ 0·28	0·078
4	53·36	53·14	+ 0·22	0·048
5	60·79	60·98	— 0·19	0·036
			0·00	0·397

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	21·14	20·97	+ 0·17	0·029
2	33·63	34·11	— 0·48	0·230
3	44·64	44·37	+ 0·27	0·073
4	53·36	53·15	+ 0·21	0·044
5	60·79	60·97	— 0·18	0·032
			+ 0·01	0·408

$q = 184{\cdot}317 - 4{\cdot}0182\ F - 160{\cdot}6524\ G.$

$q = 187{\cdot}964 - 8{\cdot}7844\ F - 160{\cdot}2209\ G.$

$q = 189{\cdot}789 - 8{\cdot}72068\ F - 161{\cdot}7724\ G.$

1912 február.

$z = 0{\cdot}944$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	8·79	8·74	+ 0·05	0·003
2	18·05	18·12	— 0·07	0·005
3	25·55	25·55	0·00	0·000
4	31·99	31·99	0·00	0·000
5	37·81	37·79	0·02	0·000
			0·00	0·008

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	8·79	8·78	+ 0·01	0·000
2	18·05	18·08	— 0·03	0·001
3	25·55	25·53	+ 0·02	0·000
4	31·99	31·98	+ 0·01	0·000
5	37·81	37·82	— 0·01	0·000
			+ 0·00	0·001

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. q	Szám q	Észl.-Sz.	Δ^2
1	8·79	8·76	+ 0·03	0·001
2	18·05	18·10	— 0·05	0·003
3	25·55	25·53	+ 0·02	0·000
4	31·99	31·99	0·00	0·000
5	37·89	37·81	0·00	0·000
			0·00	0·004

$q = 134{\cdot}265 - 23{\cdot}8963\ F - 106{\cdot}819\ G.$

$q = 137{\cdot}598 - 29{\cdot}1239\ F - 105{\cdot}7853\ G.$

$q = 139{\cdot}135 - 29{\cdot}4901\ F - 106{\cdot}7985\ G.$

1912 április.

$z = 0{\cdot}944$

t	Észl. p	Szám p	Észl.-Sz.	Δ^2
1	14·25	14·18	+ 0·07	0·005
2	23·73	23·87	— 0·14	0·020
3	31·69	31·61	+ 0·08	0·006
4	38·31	38·35	— 0·04	0·002
5	44·48	44·45	+ 0·03	0·001
			0·00	0·034

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. p	Szám p	Észl.-Sz.	Δ^2
1	14·25	14·23	+ 0·02	0·000
2	23·73	23·83	— 0·10	0·010
3	31·69	31·58	+ 0·11	0·012
4	38·31	38·34	— 0·03	0·001
5	44·48	44·49	— 0·01	0·000
			— 0·01	0·023

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. p	Szám p	Észl.-Sz.	Δ^2
1	14·25	14·21	+ 0·04	0·002
2	23·73	23·84	— 0·11	0·012
3	31·69	31·59	+ 0·10	0·010
4	38·31	38·35	— 0·04	0·002
5	44·48	44·48	0·00	0·000
			— 0·01	0·026

$p = 148{\cdot}073 - 34{\cdot}286\ F - 106{\cdot}915\ G.$

$p = 151{\cdot}947 - 40{\cdot}795\ F - 105{\cdot}391\ G.$

$p = 153{\cdot}539 - 41{\cdot}047\ F - 106{\cdot}545\ G.$

1911 április.

$z = 0{\cdot}945$

t	Észl. p	Szám p	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·52	26·56	— 0·04	0·002
2	42·26	42·17	+ 0·09	0·008
3	56·00	56·02	— 0·02	0·000
4	68·86	68·90	— 0·04	0·002
5	81·19	81·17	+ 0·02	0·000
			+ 0·01	0·012

$z = 0{\cdot}946$

t	Észl. p	Szám p	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·52	26·52	0·00	0·000
2	42·26	42·22	+ 0·04	0·002
3	56·00	56·05	— 0·05	0·002
4	68·86	68·90	— 0·04	0·002
5	81·19	81·15	+ 0·04	0·002
			— 0·01	0·008

$z = 0{\cdot}947$

t	Észl. p	Szám p	Észl.-Sz.	Δ^2
1	26·52	26·56	— 0·04	0·002
2	42·26	42·18	+ 0·08	0·006
3	56·00	56·02	— 0·02	0·000
4	68·86	68·90	— 0·04	0·002
5	81·19	81·18	+ 0·01	0·000
			— 0·01	0·010

$p = 336{\cdot}890 - 259{\cdot}442\ F - 103{\cdot}870\ G.$

$p = 341{\cdot}475 - 263{\cdot}235\ F - 105.036\ G.$

$p = 349{\cdot}088 - 274{\cdot}489\ F - 103{\cdot}318\ G.$

A következő táblázat z értékeit adja a különböző sorozatokra:

	1910 aug.	1911 jan.	1911 ápr.	1911 jun.	1911 nov.	1912 jan.	1912 febr.	1912 ápr.
z	0·947	0·946	0·946	0·945	0·945	0·945	0·945	0·945

A középérték

$$z = 0{\cdot}945$$

és z-nek ezen értékével, annak

$$z = e^{-\frac{k\pi^2}{(r_2 - r_1)^2}}$$

alakjából számítva a k értékét, azt találtam, hogy

$$k = 0{\cdot}00004249 \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{nap}}.$$

Ezen dolgozat a kolozsvári egyetem természettani intézetében készült. Legyen szabad e helyen is az intézet igazgatójának dr. TANGL KÁROLY egyetemi tanár úrnak, ki e dolgozatot javaslatba hozta s tanácsaival kivitelét nagy mértékben elősegítette, hálás köszönetemet kifejezni.

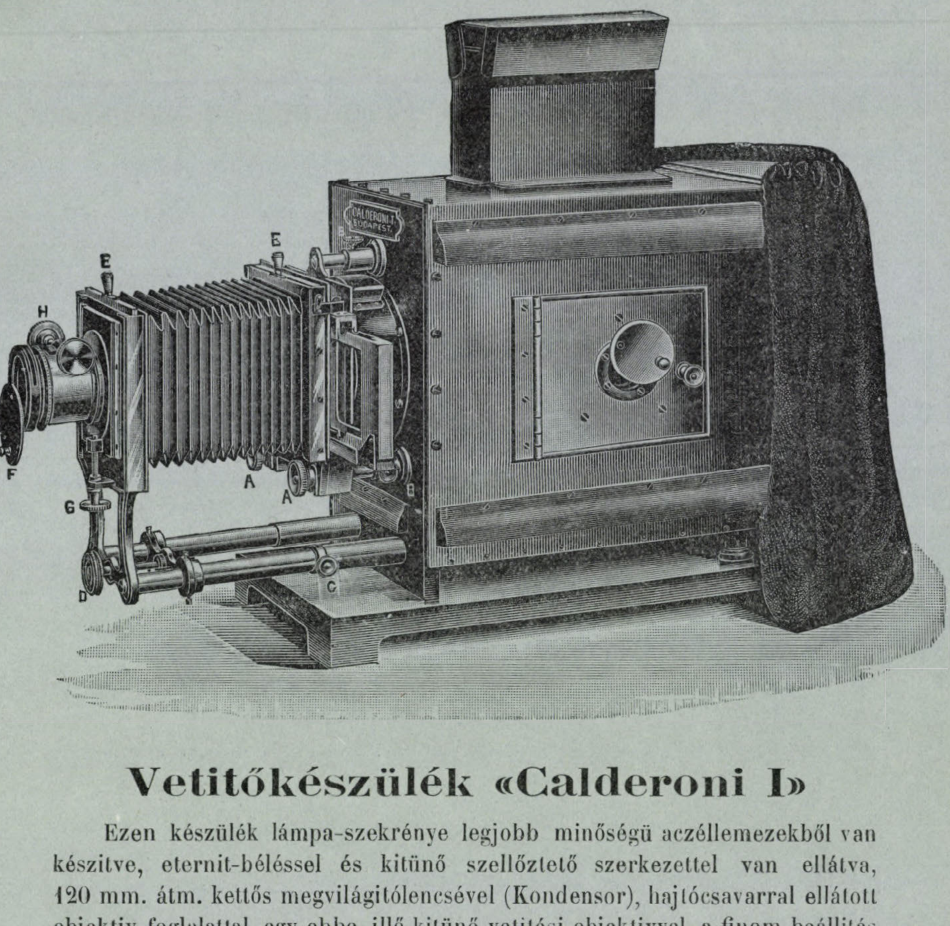
Kolozsvárt 1913 márczius hó 22-én.

Hercz Szidónia.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü aczéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivü vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készített objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.—**

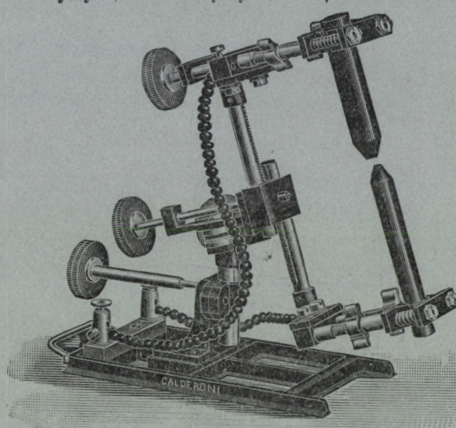
Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Elektromos ívlámpa legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—



Elektromos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	**45.**—	**65.**—	**90.**—	**145.**—	**200.**—	**240.**— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

Franklin-Társulat nyomdája

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

HUSZONKETTEDIK ÉVFOLYAM

VI—VIII. FÜZET 1913 OKT.—DECZ.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1914.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszonegyedik társulati év 1912 január 1-én kezdődött.

A tagsági díj (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük a t. Tagtársainkat szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* egyet. magántanár (VII., Ilka-u. 32.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivőtitkár czímére **VIII., Múzeum-körút 6.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőhöz küldendők: a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.,** a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A SZFERIKUS GEOMETRIA TÁRGYALÁSA A QUADRATIKUS ÉS HERMITE-FÉLE ALAKOKKAL.

Bevezetés.

A dolgozat tárgya és irodalma.

A dolgozat tárgya a szferikus geometria felépitése és általánositása a quadratikus és HERMITE-féle alakok segitségével. A szferikus geometria általánositásával először SCHILLING[1] foglalkozott. Mi nem az ő módszerét alkalmazzuk, mely tisztán geometriai jellegű, hanem F. KLEIN[2] módszerét, a ki a SCHILLING-féle eredményeket a quadratikus alakok segitségével állapitotta meg.

A SHILLING-KLEIN-féle általánositás gondolatmenete a következőkben foglalható össze. A közönséges szferikus geometria megegyezik a gömb középpontján átmenő egyenesek geometriájával, tehát azon sugárpont euklidikus geometriájával, melynek sorozója a gömb középpontja. A gömbháromszöget a megfelelő trieder éleinek a gömbbel való egy-egy metszéspontja határozza meg. Az általánositás első foka az, mikor a sugárpont sorozója a tér tetszés szerinti pontja. Ha e pont a gömbön belül fekszik, akkor a szferikus geometria *elliptikus*[3] jellegű, ha kívül fekszik *hiperbolikus* jellegű, ha pedig a gömbön fekszik, akkor a *parabolikus* geometriát kapjuk. Az általánositás második és egyszersmind utolsó foka pedig abban van, ha a sugárpont helyett sugárkongruencziát veszünk, vagyis az egyenesek oly kétszeresen végtelen sokaságát, mely bizonyos

[1] Beiträge zur geom. Theorie der Schwarz'schen «s» Function Math. Ann. 44.

[2] Vorlesung über die hypergeom. Function. p. 315—358.

[3] F. KLEIN: Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie II. 192. stb.

törvény szerint van megadva. A triéder helyébe három torzegyenes lép, mely egyeneseknek a gömbbel való metszéspontjai közül három meghatározza az általános szferikus háromszög szögpontjait. Ezen egyenesek SCHILLING-nél, mint a SCHWARZ-féle s-függvény három szinguláris pontjához tartozó alapszubsztitutiók tengelyei lépnek fel. KLEIN pedig három tetszőleges quadratikus alakkal adja meg ezeket az egyeneseket. A polárháromszöget ez egyenesek közös normálisai határozzák meg,

A szferikus geometria általánosításának más módja is lehetséges, mely az előbbinek duálja, t. i. az, midőn a sugárpont helyett a síkpontból indulunk ki. Hogy ezt megtehessük, be kell vonnunk a tárgyalásba a HERMITE-féle alakokat. Ugyanis a síkpont síkjai a gömböt körökben metszik s e köröknek felelnek meg a HERMITE-féle alakok. Az általánosítás ezen módja azonban nem vezet a szferikus geometria legáltalánosabb fajához.

Mivel a quadratikus alakok a triéder éleinek, a HERMITE-féle alakok a triéder lapjainak felelnek meg, azért következik, hogy ezek az alakok ily értelmezés mellett egymással duál vonatkozásban vannak.

Dolgozatunknak csak első és hatodik fejezete tartalmazza a SCHILLING-KLEIN-féle eredményeket s ezeket is részben más alakban. Az I. fejezetben összefoglaltuk a quadratikus alakokra vonatkozó alaptételeket. Mivel azonban a quadratikus alakok alapján a megfelelő egyenesek vonalkoordinátáit vezettük be, világosan kitűnik a hajlásszög nem euklidesi mérésének jellege. A hajlásszög SCHILLING-féle kinematikai értelmezése és KLEIN-féle értelmezése a quadratikus alakok invariánsai segítségével teljesen megegyezik, ezt KLEIN-tól eltérően a legáltalánosabb alakban mutattuk ki. A II. fejezetben alkalmas módon értelmeztük a HERMITE-féle alakokat a gömbön és meghatároztuk két sík, ill. a gömbből kimetszett két kör hajlásszögét. A III. fejezetben az egyenes és sík hajlásszögének értelmezésénél a quadratikus és HERMITE-féle alakok szimultán invariánsához jutottunk, mely reszultánsnak is nevezhető. A IV. fejezetben két egyenes által meghatározott síkhoz tartozó HERMITE-féle alakot határoztuk meg. Ez közönségesen csak metsző egyenesek esetében lehetséges, de nem metsző egyenesek esetében is sikerült egy oly másodrendű vonalfelületet meghatároznunk, mely bizonyos tekintetben a sík szerepét veszi át. A hozzátartozó HERMITE-féle alak másodrendű, ha az egyenesek metszik egymást, akkor két elsőrendű alakra esik szét. Az V. fejezetben átírtuk a sugárpont és síkpont geometriájában előforduló polus és poláris fogalmát a szferikus geometriára s ezen fogalmakat is általánosítottuk. A VI. fejezetben megállapítottuk KLEIN [1] nyomán a szferikus háromszög fogalmát és trigonometriáját. SCHILLING [2] a szferikus háromszögre vonatkozó HAMILTON-féle [3] tétel alapján épitette fel a trigonometria formuláit. A HERMITE-féle alakokból kiindulva is meghatároztuk a szferikus trigonometria tételeit s itt olyan háromszögekre is jutottunk, melyekre csak quadratikus alakok alapján nem juthatunk. Ha csak a quadratikus, vagy csak a HERMITE-féle alakok segítségével építjük fel a trigonometriát, akkor a polárháromszögre mindig szükségünk van, de ha mindkétféle alakot használjuk, akkor nincs szükségünk a polárháromszögre. A VII. fejezetben végre meghatároztuk az egyes geometriai rendszerekben a mozgások egyenleteit.

I. A quadratikus alakok értelmezése a gömbön. Két egyenes hajlásszöge.

Ha a GAUSS-féle számsíkot az egységsugarú gömbre sztereografikusan ábrázoljuk, akkor a sík egy pontjának, melyhez az $\eta = p + iq$ komplex szám tartozik, a gömb azon pontja felel meg, melynek koordinátái:

---

[1] Az említett előadás: 3. oldal 2. jegyzet.

[2] Az említett értekezés: 3. oldal 1. jegyzet.

[3] Az említett előadás 3. oldal 2. jegyzet p. 352. stb.

$$x=\frac{2p}{p^2+q^2+1},\; y=\frac{2q}{p^2+q^2+1},\; z=\frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}. \tag{1}$$

Az egység sugarú gömb egyenletéből:

$$x^2+y^2+z^2-1=0$$

következik, hogy:

$$\eta=\frac{x+iy}{1-z}=\frac{1+z}{x-iy} \tag{1)'}$$

Az:

$$f=a\eta^2+b\eta+c=0 \tag{2}$$

egyenlet gyökeinek a gömbön két pont felel meg s ezek ismét egy egyenest határoznak meg, mely ily módon a (2) egyenlethez tartozik. Ha a (2)-ben η helyett $\frac{\eta_1}{\eta_2}$-t írunk s a nevezőt elhagyjuk, akkor azt mondhatjuk, hogy az

$$f=a\eta_1^2+b\eta_1\eta_2+c\eta_2^2 \tag{2)'}$$

quadratikus alak egy a gömböt metsző egyenest határoz meg.

Az (1)'-ből következik, hogy ha a (2)-ben:

$$c=-\bar{a}^{1} \;\; \textit{és} \;\; b=\bar{b} \tag{3}$$

akkor a megfelelő egyenes a gömb középpontján megy keresztül s akkor a (2)'-t diametrális alaknak nevezzük.

Ha:

$$\begin{aligned} f_1&=a_1\eta_1^2+b_1\eta_1\eta_2+c_1\eta_2^2\\ f_2&=a_2\eta_1^2+b_2\eta_1\eta_2+c_2\eta_2^2 \end{aligned} \tag{4}$$

két diametriális alak s a megfelelő két átmérő egy-egy végpontjának koordinátái: $x_1y_1z_1$ és $x_2y_2z_2$, akkor a két átmérő hajlásszöge:

$$\cos\vartheta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

A koordináták helyett a (4) együtthatóit bevezetve:

$$\cos\vartheta=\frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}}\,\sqrt{d_{22}}} \tag{5}$$

[1] $\bar{a}$ az a-hoz tartozó konjugált komplex számot jelenti.

hol:

$$d_{kl} = b_k b_l - 2a_k c_l - 2a_l c_k \tag{6}$$

Ha még:

$$D_{33} = 4(d_{12}^2 - d_{11} d_{22}) \tag{7}$$

akkor:

$$\sin \vartheta = \frac{\frac{i}{2}\sqrt{D_{33}}}{\sqrt{d_{11}}\sqrt{d_{22}}} \tag{8}$$

Az invariánselmélet szempontjából a (4)-hez még egy quadratikus alak tartozik, a két alak kovariansa, azaz függvénydeterminánsa:

$$F = 2C_3\eta_1^2 - 4B_3\eta_1\eta_2 + 2A_3\eta_2^2. \tag{9}$$

Ha ezen quadratikus alakot i-vel szorozzuk, akkor a (3) alapján könnyen beláthatjuk, hogy ez is diametrális alak, mert A_3, B_3 és C_3 az

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|$$

matrix másodrendű determinánsai.

Mivel a (4) és (9) szimultan invariánsai eltűnnek, azért következik az (5) alapján, hogy a (9) a (4) egyenesek közös merőlegese.

Ha a (4) együtthatói nem teljesítik a (3) egyenleteket, hanem tetszőleges komplex mennyiségek, akkor a megfelelő egyenesek sem mennek a gömb középpontján keresztül, hanem általános helyzetű torzegyenesek.

Diametrális alakok esetében a (6) invariánsok valós mennyiségek, de általános alakok esetében ezen invariánsok komlex mennyiségek. Ha most is az (5) segítségével definiáljuk a hajlásszöget, akkor ez a ϑ általában komplex mennyiség lesz. Diametrális alakok esetében az (5) e diameterek euklidesi hajlásszögét jelenti, de ha a (4) általános helyzetű egyeneseket jelent, akkor az (5) azon térbeli hiperbolikus geometria értelmében méri a hajlásszöget, melynek abszolut felülete az egységsugarú gömb. Hogy ezt kimutassuk, szükségünk van a (4) egyenesek vonalkoordinátáira. A derékszögű koordináták helyett homogén koordinátákat vezetünk be s akkor az (1) így is írható:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\eta+\bar{\eta}) : -i(\eta-\bar{\eta}) : (\eta\bar{\eta}-1) : (\eta\bar{\eta}+1) \qquad (1)''$$

Ha a (4) alatt lévő $f_k = 0$ $(k = 1, 2,)$ egyenlet gyökeit $\eta_1^{(k)}$ $\eta_2^{(k)}$-val jelöljük, akkor az $(1)''$ alapján $\eta_1^{(k)}$-hoz az $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)},)$ pont, az $\eta_2^{(k)}$-hoz az $(y_1^{(k)}\, y_2^{(k)}\, y_3^{(k)}\, y_4^{(k)})$ pont tartozik; az f_k vonalkoordinátáit $p_{rs}^{(k)}$-vel jelölve: $p_{rs}^{(k)} = x_r^{(k)} y_s^{(k)} - x_s^{(k)} y_r^{(k)}$, lesz:

$$\left.\begin{aligned}
p_{12}^{(k)} &= \rho_k i\,(b_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} - \bar{b}_k \sqrt{d_{kk}}, \\
p_{34}^{(k)} &= -\rho_k\,(b_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} + \bar{b}_k \sqrt{d_{kk}}, \\
p_{23}^{(k)} &= -\rho_k i\,(a_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} - \bar{a}_k \sqrt{d_{kk}} - c_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} + \bar{c}_k \sqrt{d_{kk}}, \\
p_{14}^{(k)} &= \rho_k\,(a_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} + \bar{a}_k \sqrt{a_{kk}} - c_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} - \bar{c}_k \sqrt{d_{kk}}) \\
p_{31}^{(k)} &= \rho_k\,(a_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} + \bar{a}_k \sqrt{d_{kk}} + c_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} + \bar{c}_k \sqrt{d_{kk}}) \\
p_{24}^{(k)} &= \rho_k i\,(a_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} - \bar{a}_k \sqrt{d_{kk}} + c_k \sqrt{\overline{d_{kk}}} - \bar{c}_k \sqrt{d_{kk}})
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Ebből

$$\begin{aligned}
a_k &= \sigma_k\,[p_{31}^{(k)} + p_{14}^{(k)} + i(p_{23}^{(k)} - p_{24}^{(k)})] \\
b_k &= \sigma_k \,.\, 2\,(p_{34}^{(k)} + i p_{12}^{(k)}) \\
c_k &= \sigma_k\,[p_{31}^{(k)} - p_{14}^{(k)} - i(p_{23}^{(k)} + p_{14}^{(k)})].
\end{aligned} \qquad (11)$$

Itt ρ_k és σ_k arányossági tényezők. Ezek alapján:

$$\begin{aligned}
d_{kk} &= \sigma_k^2 4 \Psi_{p^{(k)}\, p^{(k)}} \\
d_{kl} &= \sigma_k \,.\, \sigma_l \,.\, 4(\Psi_{p^{(k)}\, p^{(l)}} + i\, P_{p^{(k)}\, p^{(l)}})
\end{aligned} \qquad (12)$$

hol:

$$\Psi_{p^{(k)}\, p^{(k)}} = p_{14}^{(k)^2} + p_{24}^{(k)^2} + p_{34}^{(k)^2} - p_{12}^{(k)^2} - p_{23}^{(k)^2} - p_{31}^{(k)^2}$$

$$P_{p^{(k)}\, p^{(l)}} = p_{12}^{(k)} p_{34}^{(l)} + p_{34}^{(k)} p_{12}^{(l)} + p_{23}^{(k)} p_{14}^{(l)} + p_{14}^{(k)} p_{23}^{(l)} + p_{31}^{(k)} p_{24}^{(l)} + p_{24}^{(k)} p_{31}^{(l)}$$

Tehát a Ψ_{pp} a gömb vonalkoordinátás egyenletének többtagúja, a $\Psi_{p^{(k)} p^{(l)}}$ pedig ennek polározott alakja; a $P_{p^{(k)}\, p^{(l)}} = 0$ pedig azt jelenti, hogy a két egyenes metszi egymást.

Ennélfogva metsző egyenesek esetében:

$$\cos\vartheta = \frac{\Psi_{p^{(k)}\, p^{(l)}}}{\sqrt{\Psi_{p^{(k)}\, p^{(k)}}}\ \sqrt{\Psi_{p^{(l)}\, p^{(l)}}}} \qquad (5)'$$

Ez pedig teljesen megegyezik a hyperbolikus tér két egyenesének hajlásszögével.

Torz egyenesek, mint legáltalánosabb helyzetű egyenesek esetében:

$$\cos\vartheta = \frac{\Psi_{p^{(k)}p^{(l)}} + i P_{p^{(k)}p^{(l)}}}{\sqrt{\Psi_{p^{(k)}p^{(k)}}}\sqrt{\Psi_{p^{(l)}p^{(l)}}}} \tag{5)''$$

SCHILLING[1] geometriailag értelmezi a torzegyenesek hajlásszögét; mi ezt KLEIN F.[2] nyomán a quadratikus alakok segítségével analytikailag teszszük az (5), illetőleg (5)'' alapján. Hátra van az (5) értelmezése s annak a kimutatása, hogy a két értelmezés megegyezik. Hogy ezt megtehessük, utalnunk kell arra, hogy a (9) abban az esetben is a (4) alatt meghatározott két egyenes közös normálisa, ha azok torzegyenesek. Ugyanis a (9) és (4) szimultán invariánsai eltűnnek, akkor pedig az (5) alapján: $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, természetesen a hiperbolikus geometria értelmében értve a merőlegességet. Megjegyzendő, hogy a (9) nemcsak az f_1 és f_2 egyenesek közös normálisa, hanem merőleges az összes: $f_l = l_1 f_1 + l_2 f_2$ egyenesekre.

Most már áttérünk az (5) geometriai értelmezésére, amenynyiben a következő tétel helyességét mutatjuk ki: Az (5) alapján definiált: $\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2$ valós része ϑ_1 jelenti azon térbeli nem euklidikus csavarmozgás rotácziós részét, mely az f_1 egyenest az f_2-be viszi s melynek tengelye a (9) egyenes; az $i\vartheta_2$ pedig jelenti e csavarmozgás transzlácziós részét.

A legáltalánosabb nem euklidikus mozgás a térbeli csavarmozgás, mely az abszolut felületet önmagába viszi, s ennek az egyenlete[2]:

$$\eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \tag{13}$$

Ezt a transzformácziót úgy kell meghatároznunk, hogy az

---

[1] Beiträge zur geom. Theorie der Schwarzschen «s» Function Math. Ann. 44. kötet 161—260. lap.

[2] KLEIN F.: Vorlesungen über die hypergeom. Function. 319. lap.

$$f_1 = a_1\eta^2+b_1\eta+c_1 = 0 \tag{14}$$

egyenletet az

$$f_2 = a_2\eta^2+b_2\eta+c_2 = 0 \tag{15}$$

egyenletbe vigye. A (14) és (15) a (4)-hez tartozó quadratikus egyenletek. Hogy a (13) a (14)-et a (15)-be vigye, kell hogy a (13) tengelye megegyezzék a (9)-hez tartozó egyenessel; tehát:

$$c\eta^2+(d-a)\eta-b\equiv\rho\,(2C_3\eta^2-4B_3\eta+2A_3) \tag{16}$$

Ebből következik, hogy:

$$c = 2\rho C_3, \quad a = 2\rho\,(K_3+B_3),$$
$$b = -2\rho A_3, \quad d = 2\rho\,(K_3-B_3);$$

s így:

$$\eta' = \frac{(K_3+B_3)\,\eta-A_3}{C_3\eta+(K_3-B_3)} \tag{13)'$$

A K_3 állandó még meghatározandó. Ha a (16) zéruspontjait H_1 és H_2-vel jelöljük, akkor a (13)' így is írható:

$$\frac{\eta'-H_1}{\eta'-H_2} = k_3\,\frac{\eta-H_1}{\eta-H_2} \tag{13)''$$

hol

$$k_3 = \frac{K_3+\sqrt{D'_{33}}}{K_3-\sqrt{D'_{33}}}, \tag{17}$$

$$D'_{33} = B_3^2-A_3C_3 = \frac{D_{33}}{16} = \frac{d_{12}^2-d_{11}d_{22}}{4} \tag{18}$$

ebből:

$$K_3 = \frac{k_3+1}{k_3-1}\sqrt{D'_{33}} \tag{19}$$

$-il$. k_3 a (13)'-höz tartozó térbeli nem euklidikus csavarmozgás amplitudója.

Ha most már a (14)-et a (13)'-vel transzformáljuk, akkor az f_1 átmegy az f'_2-be:

$$f'_2 = (K_3^2+d_{12}K_3+D'_{33})\,f_1-K_3d_{11}f_2 \tag{20}$$

Ha K_3-t úgy határozzuk meg, hogy:

$$K_3^2+d_{12}K_3+D'_{33} = 0, \tag{21}$$

akkor f_1 átmegy az f_2-be. Tehát:

$$K_3 = -\frac{d_{12}+\sqrt{d_{11}d_{22}}}{2} \tag{22}$$

s ekkor a (17) alapján:

$$k_3 = \frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}}\sqrt{d_{22}}} + i \cdot \frac{\frac{i}{2}\sqrt{D_{33}}}{\sqrt{d_{11}}\sqrt{d_{22}}} = e^{i\vartheta} \tag{23}$$

Ha a (21) másik gyökét vettük volna, akkor ϑ helyett $(\vartheta+\pi)$-t kellett volna írni a (23)-ban.

A (13)'-ben K_3 helyett a (22) alatti értéket írva megkapjuk azon transzformácziót, mely a (14)-et a (15)-be viszi, s a (23)-ból és (13)''-ből látjuk, hogy a hozzá tartozó nem euklidikus csavarmozgás amplitudója: ϑ, a két egyenes hajlásszöge. Ezzel tételünk első részét bebizonyitottuk. Hátra van még a csavarmozgás szétbontása a rotáczióra és transzláczióra.

A (23) alapján $k_3 = e^{i\vartheta} = e^{i\vartheta_1 - \vartheta_2} = e^{i\vartheta_1} \cdot e^{-\vartheta_2} = k'_3 \cdot k''_3$, tehát $k'^2_3 = k_3 : \bar{k}_3$ és $k''^2_3 = k_3\bar{k}_3$.

A (13)'' ezen két transzformáczióra bontható fel:

$$\frac{H-H_1}{H-H_2} = k'_3 \frac{\eta - H_1}{\eta - H_2}$$

$$\frac{\eta'-H_1}{\eta'-H_2} = k''_3 \frac{H-H_1}{H-H_2}$$

Ezeknek megfelel:

$$H = \frac{(K'_3+(B_3)\,\eta - A_3}{C_3\eta + (K'_3 - B_3)} \tag{24}$$

$$\eta' = \frac{(K''_3+B_3)\,\eta - A_3}{C_3 H + (K''_3 - B_3)}, \tag{25}$$

hol:

$$K'_3 = \frac{k'_3+1}{k'_3-1}\sqrt{D'_{33}} \tag{26}$$

$$K''_3 = \frac{k''_3+1}{k''_3-1}\sqrt{D'_{33}} \tag{27}$$

és

$$K_3 = \frac{K'_3 K''_3 + D'_{33}}{K'_3 + K''_3}$$

Ha a (14)-re a (24)-et alkalmazzuk, akkor a (20)-at kapjuk, ha ott K_3 helyett K_3'-t írunk, vagyis a (14) átmegy az f_2'-be:

$$f_2' = (K_3'^2 + d_{12}K_3' + D_{33}')f_1 - K_3'd_{11}f_2 \qquad (20)'$$

Ennek a diszkriminánsa: $d_{22}' = d_{11}(K_3'^2 - D_{33}')^2$, az f_1-el való szimultán invariánsa: $d_{12}' = d_{11}(K_3'^2 + D_{33}')$, akkor a (14)-nek és (20)'-nek a hajlásszöge:

$$\cos\vartheta' = \frac{K_3'^2 + D_{33}'}{K_3'^2 - D_{33}'};$$

tekintettel a (26)-ra:

$$\cos\vartheta' = \frac{1}{2}(k_3' + \bar{k}_3') = \cos\vartheta_1;$$

tehát, mivel a (20)' merőleges a (9)-re a (24) az f_1-egyenest ϑ_1 szöggel elforgatta a (9) tengely körül.

A (15) és (20)' szimultán invariansa $d_{12}'' = K_3'^2 d_{12} + 4D_{33}'K_3' + d_{12}D_{33}'$; s így az f_2' és f_2 hajlásszöge:

$$\cos\vartheta'' = \frac{(K_3'^2 + D_{33}')\,d_{12}}{\sqrt{d_{11}}\sqrt{d_{22}}(K_3'^2 - D_{33}')} + \frac{4K_3'D_{33}'}{\sqrt{d_{11}}\sqrt{d_{22}}(K_3'^2 - D_{33})}.$$
$$= \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1$$
$$= \cos(\vartheta - \vartheta_1) = \cos i\vartheta_2$$

Ebből látjuk, hogy a (20)' és (15) egyenesek hajlásszöge; $i\vartheta_2$, illetőleg mivel mindkettő a (9)-re merőleges, azért nem euklidikus értelemben párhuzamosak és egymástól való távolságuk: $i\vartheta_2$. Mivel pedig a (27) a (20)'-t a (15)-be viszi, azért mondhatjuk, hogy ez a párhuzamos eltolást jelenti a (9) tengely menetén. Ezzel tételünket teljesen bebizonyítottuk és pedig a legáltalánosabb módon.[1]

[1] Speciális esetre be van bizonyítva e tétel KLEIN F. említett előadásában 339—343.

II. A Hermite-féle alakok értelmezése a gömbön. Két kör, illetőleg sík hajlásszöge.

Az első fejezetben láttuk, hogy valamely quadratikus alak a gömbön két pontot határoz meg, illetőleg az azokat összekötő egyenest. A sztereografikus projekczió szempontjából a Gauss-féle számsíkon az egyenes és kör ekvivalens vonalak. Tudjuk, hogy ezeknek a gömbön körök felelnek meg. A gömb valamely általános helyzetű körének az egyenlete pedig:

$$\varphi = \alpha\eta\bar{\eta}+\beta\eta+\bar{\beta}\bar{\eta}+\gamma = 0, \tag{1}$$

hol α és γ valós mennyiségek. Ha az (1)-et homogén alakban írjuk, akkor a következő Hermite-féle alakot nyerjük:

$$\varphi = \alpha\eta_1\bar{\eta}_1+\beta\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma\eta_2\bar{\eta}_2\,, \tag{1)'$$

melynek a gömbön a

$$(\beta+\bar{\beta})\,x+i\,(\beta-\bar{\beta})\,y+(\alpha-\gamma)\,z+(\alpha+\gamma) = 0 \tag{1)''$$

sík által kimetszett kör felel meg. Ha $\alpha+\gamma = 0$, akkor a megfelelő kör a gömbnek legnagyobb köre.

Vegyünk két Hermite-féle alakot:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_1\eta_1\bar{\eta}_1+\beta_1\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}_1\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma_1\eta_2\bar{\eta}_2\\ \varphi_2 &= \alpha_2\eta_1\bar{\eta}_1+\beta_2\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}_2\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma_2\eta_2\bar{\eta}_2\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Az $\alpha_k+\gamma_k = 0$ esetben a megfelelő síkok a gömb középpontján mennek keresztül s a hajlásszögük tekintettel az (1)''-re:

$$\cos\vartheta = \\ = \frac{(\beta_1+\bar{\beta}_1)(\beta_2+\bar{\beta}_2)-(\beta_1-\bar{\beta}_1)(\beta_2-\bar{\beta}_2)+(\alpha_1-\gamma_1)(\alpha_2-\gamma_2)}{\sqrt{(\beta_1+\bar{\beta}_1)^2-(\beta_1-\bar{\beta}_1)^2+(\alpha_1-\gamma_1)^2}\,\sqrt{(\beta_2+\bar{\beta}_2)^2-(\beta_2-\bar{\beta}_2)^2+(\alpha_2-\gamma_2)^2}}\,. \tag{3}$$

A (2) invariánsait δ_{kl}-el jelölve:

$$\delta_{kl} = 2\,(\beta_k\bar{\beta}_l+\bar{\beta}_k\beta_l-\alpha_k\gamma_l-\alpha_l\gamma_k),$$

ebben a speciális esetben, mikor $\alpha_k+\gamma_k = 0$ a (3) így írható.

$$\cos\vartheta = \frac{\delta_{12}}{\sqrt{\delta_{11}}\,\sqrt{\delta_{22}}}\,. \tag{4}$$

A (3) vagy a (4) két legnagyobb gömbkör síkjának, illetőleg e legnagyobb gömbkörök euklidikus hajlásszögét méri.

Mivel a (4) abszolut invariánsa a (2)-nek akkor is, ha az $a_k+\gamma_k=0$ feltételt elejtjük, azért a (4) segítségével definiáljuk két általános helyzetű sík, illetőleg az ezek által kimetszett két kör hajlásszögét. De a térbeli hiperbolikus geometria rendszerében, hol az abszolut felület az egységsugarú gömb, két sík hajlásszögének a képlete megegyezik a (4)-el. Ugyanis az egységsugarú gömb egyenlete homogén síkkoordinátákban:

$$\Omega_{uu}=u_1^2+u_2^2+u_3^2-u_4^2=0.$$

A (2) sík koordinátáit $u_i^{(k)}$ $\left(\begin{smallmatrix}i=1,2,3,4\\k=1,2\end{smallmatrix}\right)$-vel ielölve az (1)″ alapján: $u_1^{(k)}:u_2^{(k)}:u_3^{(k)}:u_4^{(k)}=(\beta_k+\bar\beta_k):i(\beta_k-\bar\beta_k):(a_k-\gamma_k):-(a_k+\gamma_k)$ úgy, hogy: $\delta_{kl}=\Omega u^{(k)}u^{(l)}$ s így:

$$\cos\vartheta=\frac{\Omega u^{1)}u^{(2)}}{\sqrt{\Omega u^{(1)}u^{(1)}}\sqrt{\Omega u^{(2)}u^{(2)}}}. \tag{4)'}$$

Tehát a (4) általánosságban hiperbolikus értelemben méri a hajlásszöget.

Ha:

$$\varDelta_{33}=\delta_{12}^2-\delta_{11}\delta_{22},$$

akkor:

$$\sin\vartheta=\frac{i\sqrt{\varDelta_{33}}}{\sqrt{\delta_{11}}\sqrt{\delta_{22}}}. \tag{5}$$

Valós körök esetében $\delta_{kk}>0$, ha továbbá: $\delta_{12}<\sqrt{\delta_{11}}\sqrt{\delta_{22}}$, akkor a körök valós pontokban metszik egymást, ellenkező esetben nem.

A két kör hajlásszögét kinematikailag is értelmezhetjük. Ha a (2)-ből az $\eta_1:\eta_2$ hányadost kiküszöböljük, az

$$f_3=a_3\eta_1^2+b_3\eta_1\eta_2+c_3\eta_2^2 \tag{6}$$

quadratikus alakot kapjuk, hol:

$$\begin{aligned}a_2&=a_1\beta_2-a_2\beta_1\\ b_3&=a_1\gamma_2-a_2\gamma_1-(\beta_1\bar\beta_2-\bar\beta_1\beta_2)\\ c_3&=\beta_1\gamma_2-\bar\beta_2\gamma_1.\end{aligned} \tag{7}$$

A (6) a (2) által értelmezett két kör metszéspontjait összekötő egyeneshez, vagyis a két sík metszésvonalához tartozó quadratikus alak; ha a két kör nem metszi egymást valós pontokban, vagyis ha a két sík metszésvonala a gömböt nem metszi, akkor a (6) e metszésvonal polárisát, a két síkra közös merőleges egyenest határozza meg.

Azon transzformáczió, mely a (2) alatt lévő φ_1-et a φ_2-be viszi, olyan, melynek tengelye a (6) s akkor az I. fejezet alapján:

$$\eta' = \frac{\left(K_3 - \frac{b_3}{2}\right)\eta - c_3}{a_3\eta + \left(K_3 + \frac{b_3}{2}\right)}, \tag{8}$$

vagy másképp írva:

$$\frac{\eta' - \eta^{(1)}}{\eta' - \eta^{(2)}} = k_3 \cdot \frac{\eta - \eta^{(1)}}{\eta - \eta^{(2)}}, \tag{8)'$$

hol:

$$k_3 = \frac{2K_3 + \sqrt{\Delta'_{33}}}{2K_3 - \sqrt{\Delta'_{33}}} \tag{8'')$$

$$\Delta'_{33} = b_3^2 - 4a_3c_3 = \frac{1}{4}(\delta_{12}^2 - \delta_{11}\delta_{22}). \tag{8''')$$

Ha a (2) alakokat nem homogén alakban gondoljuk írva és a φ_1-re a (8)-at alkalmazzuk, akkor az átmegy a:

$$\varphi'_1 = \left((K_3^2 + \delta_{12}K_3 + \frac{\Delta'_{33}}{4}\right)\varphi_1 - \delta_{11}K_3\varphi_2 \tag{9}$$

alakba.

A K_3 állandót a

$$K_3^2 + \delta_{12}K_3 + \frac{\Delta'_{33}}{4} = 0 \tag{10}$$

egyenletből határozzuk meg.

A (10) egyik gyöke:

$$K_3 = \frac{-\delta_{12} - \sqrt{\delta_{11}}\sqrt{\delta_{22}}}{2} \tag{11}$$

s így a (8) a (11) alapján a φ_1-et a φ_2-be viszi. A (8) amplitudója a (8)'' szerint:

$$k_3 = \frac{\delta_{12}}{\sqrt{\delta_{11}}\sqrt{\delta_{22}}} + i \cdot \frac{i\sqrt{\Delta_{33}}}{\sqrt{\delta_{11}}\sqrt{\delta_{22}}} = e^{i\vartheta} \tag{12}$$

A (10) másik gyökének megfelelő amplitudó: $(\vartheta+\pi)$.

A (8)' mutatja, hogy ha a két kör valós pontokban metszi egymást, a (8) csak forgást jelent, és «ϑ» a forgás nagysága; ha a körök nem valós pontokban metszik egymást, akkor a (8) a (6) mentén való párhuzamos eltolást jelent s ennek nagysága: ϑ, de ez most képzetes mennyiség.

III. Az egyenes és kör, illetőleg sík hajlásszöge.

Ha valamely quadratikus alakhoz a zéruspontjai által meghatározott egyenest és egy HERMITE-féle alakhoz a megfelelő kör síkját rendeljük, akkor meghatározhatjuk az egyenes és sík hajlásszögét is, mely a két alak szimultán invariánsához vezet.

Legyen tehát adva az:

$$f = a\eta_1^2 + b\eta_1\eta_2 + c\eta_2^2 \tag{1}$$

quadratikus alak és a:

$$\varphi = \alpha\eta_1\bar{\eta}_1 + \beta\eta_1\bar{\eta}_2 + \bar{\beta}\bar{\eta}_1\eta_2 + \gamma\eta_2\bar{\eta}_2 \tag{2}$$

HERMITE-féle alak.

Az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy az (1) diszkriminánsa: d valós pozitiv mennyiség, mert ha nem volna az, akkor végig szorozzuk az (1)-et $\sqrt{\bar{d}}$-vel s elérjük czélunkat.

Fektessünk az (1) egyenesen keresztül egy síkot, mely a (2)-re a hyperbolikus geometria értelmében merőleges. Legyen e síknak megfelelő HERMITE-féle alak:

$$\varphi_1 = \alpha_1\eta_1\bar{\eta}_1 + \beta_1\eta_1\bar{\eta}_2 + \bar{\beta}_1\bar{\eta}_1\eta_2 + \gamma_1\eta_2\bar{\eta}_2. \tag{3}$$

Az itt fellépő együtthatók három egyenletnek tesznek eleget:

$$\begin{aligned}\bar\beta\beta_1+\beta\bar\beta_1-\gamma\alpha_1-\alpha\gamma_1&=0\\ 2\bar a\beta_1+2a\bar\beta_1-(b+\bar b)\,\alpha_1&=0\\ (b-\bar b)\bar\beta_1-2c\alpha_1+2\bar a\gamma_1&=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Az első egyenlet kifejezi a (3) és (2) merőlegességét, a másik kettő pedig annak a föltétele, hogy az (1) egyenes a (3) síkban fekszik.

A (4) rendszerből meghatározhatjuk az $\alpha_1:\beta_1:\bar\beta_1:\gamma_1$ viszonyt s akkor a II. (7) alapján a (3) és (2) síkok metszésvonalához tartozó quadratikus alak:

$$f_1=a_1\eta_1^2+b_1\eta_1\eta_2+c_1\eta_2^2, \tag{5}$$

hol:

$$\begin{aligned}a_1&=2\bar a\beta^2-2\bar b\alpha\beta+2\bar c\alpha^2-\frac{a\delta}{2}\\ b_1&=4\bar a\beta\gamma-2\bar b(\beta\bar\beta+\alpha\gamma)+4\bar c\alpha\bar\beta-\frac{b\delta}{2}\\ c_1&=2\bar a\gamma^2-2b\bar\beta\gamma+2\bar c\bar\beta^2-\frac{c\delta}{2}\\ \delta&=4(\beta\bar\beta-\alpha\gamma).\end{aligned} \tag{6}$$

Az (1) és (2) hajlásszögét tulajdonképen az (1) és (5) hajlásszögével mérjük. Az I. (5) alapján:

$$\cos\vartheta=\frac{d_1}{\sqrt{d}\sqrt{d_{11}}}.$$

De a (6) alapján:

$$d_{11}=+\delta\,.\,D_{f\varphi}+\frac{\delta^2 d}{2}$$

s az (1) és (6) alapján a szimultán invariáns:

$$d_1=-\frac{d\delta}{2}D_{f\varphi}$$

hol:

$$\begin{aligned}D_{\varphi f}=&4\alpha^2c\bar c+4\beta^2\bar ac+4\bar\beta^2a\bar c+4\gamma^2a\bar a+2(\beta\bar\beta+\alpha\gamma)\,b\bar b-4\alpha\beta\bar bc-\\ &-4\alpha\bar\beta b\bar c-4\beta\gamma\bar ab-4\bar\beta\gamma b\bar\beta.\end{aligned} \tag{7}$$

Tehát:

$$\cos\vartheta=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{D_{f\varphi}}{d\delta}}. \tag{8}$$

Ha az (1) alak diszkriminánsa nem valós mennyiség, akkor az (1)-et $\sqrt{d}$-vel végig szorozva a (8)-ilyen alakú:

$$\cos\vartheta=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{D_{f\varphi}}{\sqrt{d}\sqrt{d\delta}}}. \tag{8'}$$

A merőlegesség feltétele a (8) szerint:

$$D_{f\varphi}=-\frac{d\delta}{2}.$$

A (8)-ból következik, hogy:

$$\sin\vartheta=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{D_{f\varphi}}{d\delta}}. \tag{9}$$

Ez utóbbi képletnek más alakot is adhatunk. Ugyanis, ha az (1) zéruspontjainak az értékeit behelyettesítjük a (2)-be, akkor, feltéve, hogy d valós, a két gyöknek megfelelően két helyettesítési értéket kapunk:

$$\begin{aligned} 2a\bar{a}\,.\,\varphi_1&=P+Q\sqrt{d}\\ 2a\bar{a}\,.\,\varphi_2&=P-Q\sqrt{d} \end{aligned} \tag{10}$$

hol:

$$\begin{aligned} P&=\alpha(b\bar{b}+d)+4\gamma a\bar{a}-2\beta\bar{a}b-2\bar{\beta}a\bar{b}\\ Q&=2\beta\bar{a}+2\bar{\beta}a-\alpha(b+\bar{b}); \end{aligned} \tag{10'}$$

akkor könnyen meggyőződhetünk, hogy:

$$D_{f\varphi}-\frac{d\delta}{2}=\frac{P^2-dQ^2}{4a\bar{a}} \tag{11}$$

s így:

$$\sin\vartheta=i\sqrt{\frac{P^2-dQ^2}{4a\bar{a}d\delta}}. \tag{12}$$

Ha $P^2-dQ^2=0$ akkor a (10) szerint vagy az egyik vagy a másik helyettesítési érték eltűnik, vagy mindkettő, vagyis az (1)-nek és (2)-nek vagy egy, vagy két közös gyöke van. Ilyen szempontból a (11) alatt lévő: $D'_{f\varphi}=D_{f\varphi}-\frac{d\delta}{2}$ invariáns az

1) quadratikus és (2) Hermite-féle alak reszultánsának tekinthető.

Az (1) egyenes teljesen benne fekszik a (2) síkban, ha: $P=0$ és $Q=0$.

IV. Két egyenes által meghatározott kör, illetőleg sík.

A II. fejezet (6) (7) egyenletei alapján meghatároztuk azon quadratikus alakot, melynek zéruspontjai a megfelelő két kör metszéspontjai, másszóval meghatároztuk a két kör síkjainak metszésvonalát. Most azon körnek, illetőleg síknak megfelelő Hermite-féle alakot akarjuk meghatározni, mely kör, illetőleg sík tartalmazza a megadott két quadratikus alak zérus pontjait. A feladat csak akkor oldható meg, ha a két quadratikus alaknak megfelelő egyenesek metszik egymást.

Legyen tehát adva két quadratikus alak:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1\eta_1^2+b_1\eta_1\eta_2+c_1\eta_2^2 \\ f_2 &= a_2\eta_1^2+b_2\eta_1\eta_2+c_2\eta_2^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Feltesszük, hogy az f_1 és f_2 diszkriminánsai valósak, akkor kell, hogy a szimultán invariánsa az (1)-nek is valós legyen, mert csak abban az esetben fekszik az (1) négy zérus pontja egy körön, illetőleg síkban.

A meghatározandó Hermite-féle alak legyen:

$$\varphi = \alpha\eta_1\bar{\eta}_1+\beta\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma\eta_2\bar{\eta}_2 . \tag{2}$$

Az (1) zérus pontjai akkor elégítik ki a (2)-t, ha a III. fejezet (10)' alatt lévő kifejezések eltűnnek. Tehát:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\bar{a}_1\beta+2a_1\bar{\beta}-(b_1+\bar{b}_1)\,\alpha = 0 \\ Q_2 &= 2\bar{a}_2\beta+2a_2\bar{\beta}-(b_2+\bar{b}_2)\,\alpha = 0 \\ P_1 &= -2\bar{a}_1b_1\beta-2a_1\bar{b}_1\bar{\beta}+(b_1\bar{b}_1+d_{11})\,\alpha+4a_1\bar{a}_1\gamma = 0 \\ P_2 &= -2\bar{a}_2b_2\beta-2a_2\bar{b}_2\bar{\beta}+(b_2\bar{b}_2+d_{22})\,\alpha+4a_2\bar{a}_2\gamma = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ezen egyenletrendszernek akkor van zérustól különböző megoldása, ha a determinánsa eltűnik. Ez a feltétel pedig akkor teljesül, ha d_{11} d_{22} és d_{12} valósak. Ekkor a (3) megoldása:

$$\alpha:\beta:\bar{\beta}:\gamma=$$
$$4i(\bar{a}a):2i[(ab)+(a\bar{b})]:2i[(\bar{a}b)+(\bar{a}\bar{b})]:i[2(ca)-2(\bar{c}\bar{a})+(\bar{b}b)] \quad (4)$$

hol az (ab) alakú kifejezések az $(a_1b_2-a_2b_1)$ determinánsokat elentik.

Ha az (1) diszkriminánsai nem lettek volna valós mennyiségek, akkor $\sqrt{d_{ii}}$-ve végig kellett volna szorozni az f_i-t, és akkor a (4)-ben a_i b_i c_i helyett $a_i\sqrt{d_{ii}}$, $b_i\sqrt{d_{ii}}$, $c_i\sqrt{d_{ii}}$-t kell írni.

A (2)-t az (1)-ből még másképen is lehet meghatározni. Az (1) diszkriminánsai legyenek ismét valós mennyiségek, a d_{12} lehet tetszőleges, tehát nem tesszük fel azt, hogy a két egyenes messe egymást. Az $f_l=l_1f_1+l_2f_2$ alakoknak megfelelő egyenesek merőlegesek az (1) közös merőleges egyenesére. Ha feltesszük, hogy: $l_2:l_1$ valós, akkor ezen egyenesek egyszerűen végtelen sokasága, melybe az f_1 és f_2 is tartozik, egy másodrendű vonalfelületet alkot, melynek az egységsugarú gömbbel való metszésvonala az:

$$f_l=l_1f_1+l_2f_2=0$$
$$\bar{f}_l=\bar{l}_1\bar{f}_1+\bar{l}_2\bar{f}_2=0 \quad (5)$$
és
$$\bar{l}_1l_2-l_1\bar{l}_2=0$$

egyenletrendszerből nyerhető, ha az l_i $\bar{l}_i$ parametereket kiküszöböljük. Így kapjuk ezen másodrendű Hermite-féle alakot:

$$\varphi_{12}=i(\bar{f}_1f_2-f_1\bar{f}_2),$$

Kifejtett alakban:

$$\begin{aligned}\varphi_{12}=&\,i(\bar{a}a)\eta_1^2\bar{\eta}_1^2+i(\bar{a}b)\eta_1\eta_2\bar{\eta}_1^2+i(\bar{a}c)\eta_2^2\bar{\eta}_1^2+\\&+i(\bar{b}a)\eta_1^2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2+i(\bar{b}b)\eta_1\eta_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2+i(\bar{b}c)\eta_2^2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 \qquad (6)'\\&+i(\bar{c}a)\eta_1^2\bar{\eta}_2^2+i(\bar{c}b)\eta_1\eta_2\bar{\eta}_2^2+i(\bar{c}c)\eta_2^2\bar{\eta}_2^2.\end{aligned}$$

Ezen speciális másodrendű Hermite-féle alak determinánsa eltűnik:

$$D = \begin{vmatrix} (\bar{a}a) & (\bar{a}b) & (\bar{a}c) \\ (\bar{b}a) & (bb) & (\bar{b}c) \\ (\bar{c}a) & (\bar{c}b) & (\bar{c}c) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Ha felteszszük, hogy d_{12} is valós, akkor a (6)′ két elsőrendű Hermite-féle alak szorzatára bomlik fel, mert akkor az $f_l = l_1 f_1 + l_2 f_2$ egyenesek valós: $l_1 : l_2$ viszony mellett mind metszik egymást s így az f_1 és f_2 által meghatározott síkban fekszenek. Könynyen igazolhatjuk, hogy a (6)′ egyik tényezője megegyezik a (2)-vel a (4) együtthatókkal, a másik tényező pedig, egy arányossági faktortól eltekintve, nem más, mint a

$$\varphi' = \alpha' \beta_1 \bar{\eta}_1 + \beta' \eta_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\beta}' \bar{\eta}_1 \eta_2 + \gamma' \eta_2 \bar{\eta}_2, \tag{2}$$

hol:

$$\alpha' : \beta' : \bar{\beta}' : \gamma' =$$
$$= 4i(\bar{a}a) : 2i[(ab)-(a\bar{b})] : 2i[(\bar{a}b)-(\bar{a}\bar{b})] : -i[2(ca)-2(\bar{c}\bar{a})-(bb)] \tag{4}$$

úgy hogy:

$$\varphi_{12} = \frac{\varphi \cdot \varphi'}{16i(\bar{a}a)}.$$

Ha a (2) és (2)′ helyett a derékszögű koordínátákat vezetjük, akkor könnyen meggyőződhetünk, hogy a $\varphi' = 0$ nem más, mint az (1) egyenesek metszéspontjának polársíkja a gömbre vonatkozólag s így a $\varphi' = 0$ sík az $f_l = l_1 f_1 + l_2 f_2$ egyenesek poláregyeneseit tartalmazza.

Ha d_{12} nem valós, akkor a (6)′ nem bontható szét s így a (6)′ az f_1 és f_2 által meghatározott, általánosított értelemben vett, síknak tekinthető, de akkor a (2) és (2)′ is együttesen tekintendő az f_1 és f_2 által meghatározott síknak.

Ha adva van most már egy a (6)′-höz hasonlóan speciális másodrendű Hermite-féle alak:

$$\begin{aligned} \varphi_{12} = {} & a_{11}\eta_1^2\bar{\eta}_1^2 + a_{12}\eta_1\eta_2\bar{\eta}_1^2 + a_{13}\eta_2^2\bar{\eta}_1^2 + \\ & + a_{21}\eta_1^2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + a_{22}\eta_1\eta_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + a_{23}\eta_2^2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 \\ & + a_{31}\eta_1^2\bar{\eta}_2^2 + a_{32}\eta_1\eta_2\bar{\eta}_2^2 + a_{33}\eta_2^2\bar{\eta}_2^2 \end{aligned} \tag{7}$$

hol:

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \text{ és } |a_{ik}| . = 0, \tag{8}$$

akkor a dolog természetéből következik, hogy az f_1 és f_2 nem határozható meg, de meglehet határozni az F_3 közös merőleges egyenesét az $f_l = l_1 f_1 + l_2 f_2$-nek. Mivel a (8) feltételek mellett a (7) olyan alakú, mint a (6)', azért kell hogy: $(bc)(a_{i1} + (ca)a_{i2} + (ab)a_{i3} = 0$ $(i=1, 2, 3)$ de (bc) (ca) (ab) nem más, mint A_3 B_3 C_3 és az $|a_{ik}|$ másodrendű aldeterminánsait A_{ik}-val jelölve.

$$A_3 : B_3 : C_3 = A_{i1} : A_{i2} : A_{i3} \quad (i=1, 2, 3) \tag{9}$$

s igy az I. fejezet (9) alapján:

$$F_3 = 2C_3\eta_1^2 - 4B_3\eta_1\eta_2 + 2A_3\eta_2^2. \tag{10}$$

Tehát a (9) alapján a (10) közös merőleges meghatározható. A (7) és az elsőrendű HERMITE-féle alak közti különbségre még visszatérünk az általánositott szferikus trigonometria tárgyalásánál.

Ha az (1) két diametriális alak, akkor az általuk meghatározott HERMITE-féle alak a (4) alapján:

$$\varphi_3 = iB_3\eta_1\bar{\eta}_1 + iC_3\eta_1\bar{\eta}_2 - iA_3\bar{\eta}_1\eta_2 - iB_3\eta_2\bar{\eta}_2. \tag{11}$$

Ha a (6)-ból indulunk ki, akkor az egyik tényező a (11), a másik pedig:

$$\varphi_3' = \sigma(\eta_1\bar{\eta}_1 + \eta_2\bar{\eta}_2). \tag{12}$$

Mint látjuk a (12) teljesen független az (1)-től s igy minden diametrális alakpárra érvényes. A (12)-t derékszögű, vagy homogén koordinátákra átírva, azt látjuk, hogy az a kezdőpontnak polársíkja.

V. A polus és poláris.

Mivel a későbbiekben a szferikus trigonometriát akarjuk felépiteni a quadratikus és HERMITE-féle alakok segítségével s mivel ott nagy szerepet játszik az eredeti háromszöghöz tartozó polárháromszög, azért czélszerű lesz már most a polus és poláris fogalmát a quadratikus és HERMITE-féle alakok segítségével leírni.

Tárgyalásunkat a diametrális alakok segitségével a közönséges gömbháromszögtan keretén belül kezdjük s ennek az alapján térünk át az általánosításra.

Legyen tehát adva egy diametrális alak:

$$\begin{gathered} f = a\eta_1^2 + b\eta_1\eta_2 + c\eta_2^2 \\ c = -\bar{a} \quad b = \bar{b} \end{gathered} \tag{1}$$

és egy HERMITE-féle alak, mely egy legnagyobb gömbkört értelmez:

$$\begin{gathered} \varphi = \alpha\eta_1\bar{\eta}_1 + \beta\eta_1\bar{\eta}_2 + \bar{\beta}\bar{\eta}_1\eta_2 + \gamma\eta_2\bar{\eta}_2 \\ \alpha + \gamma = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Milyen föltétel mellett lesz a (2) az (1) egyik zéruspontjának s így a másik zéruspontnak is a polárisa?

A közönséges szferikus geometria értelmében a (2) akkor lesz az (1)-nek polárisa, ha a (2) minden pontjának szferikus távolsága az (1) egyik zéruspontjától: $\frac{\pi}{2}$, vagyis, ha az (1) egyenes merőleges a (2) által meghatározott síkra.

A III. fejezet (12) egyenlete alapján az egyenes és sík hajlásszöge:

$$\sin\vartheta = i\sqrt{\frac{P^2 - dQ^2}{4\alpha\bar{\alpha}d\delta}}. \tag{3}$$

A III. fejezet (10)' egyenleteit diametrális alakokra átirva lesz:

$$\begin{aligned} Q &= 2(\beta\bar{a} + \bar{\beta}a - \alpha b) \\ P &= -bQ. \end{aligned}$$

a (3)-ba helyettesítve:

$$\sin\vartheta = -\frac{2(\beta\bar{a} + \bar{\beta}a - \alpha b)}{\sqrt{d}\sqrt{\delta}}.$$

Az (1) merőleges a (2)-re, ha:

$$(\beta\bar{a} + \bar{\beta}a - \alpha b)^2 = (b^2 + 4a\bar{a})(\beta\bar{\beta} + \alpha^2). \tag{4}$$

Egyszerű átalakítás után a (4) így is írható:

$$(\beta\bar{a} - \bar{\beta}a)^2 = (\beta b + 2\alpha a)(\bar{\beta}b + 2\alpha\bar{a}). \tag{4'}$$

Mivel a baloldalon álló kifejezés negativ, a jobboldalon lév pozitiv, azért a $(4)'$ csak úgy állhat fenn, ha:

$$\beta b+2\alpha a=0. \tag{5}$$

Ha tehát az (1) diametriális alak van adva, melyet most így írunk:

$$f'=a\eta_1^2+b\eta_1\eta_2-\bar{a}\eta_2^2, \tag*{(1)$'$}$$

akkor ennek polárisa a (6) alapján:

$$\varphi'=b\eta_1\bar{\eta}_1-2a\eta_1\bar{\eta}_2-2\bar{a}\eta_1\bar{\eta}_2-b\eta_2\bar{\eta}_2. \tag*{(2)$'$}$$

Ha ellenben a (2) van adva:

$$\varphi''=\alpha\eta_1\bar{\eta}_1+\beta\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}\bar{\eta}_1\eta_2-\alpha\eta_2\bar{\eta}_2, \tag*{(2)$''$}$$

akkor ennek polusa:

$$f''=\beta\eta_1^2-2\alpha\eta_1\eta_2-\bar{\beta}\eta_2^2. \tag*{(1)$''$}$$

Az eddigi eredményeket következőképen általánosítjuk. Alkalmazzunk a diametrális quadratikus és Hermite-féle alakokra egy lineáris tört transzformácziót:

$$\eta'=\frac{p\eta+q}{r\eta+s}\ (ps-qr\mp 0), \tag{6}$$

akkor ez a (6) a fentnevezett alakokat úgy transzformálja, hogy a megfelelő egyenesek és síkok a gömbön belül fekvő P_0 ponton mennek keresztül, azon P_0 ponton, melybe a (6) inverz transzformácziójának megfelelő kollineaczió a koordinátarendszer kezdőpontját viszi. Ha a P_0 előre megvan adva a hozzátartozó (6) végtelen sokféleképen határozható meg.

Ha valamelyik ily módon meghatározott (6)-ot az $(1)'$ $(2)'$ $(1)''$ $(2)''$-re alkalmazzuk, akkor a P_0 ponton keresztülmenő egyenesek és síkokra vonatkozólag, illetőleg a megfelelő alakokra vonatkozólag a polus és poláris meghatározását befejezettnek tekinthetjük.

Czélszerű lesz azonban itt a polus és poláris meghatározását más alapon végezni. Legyen:

$$f_i=a_i\eta_1^2+b_i\eta_1\eta_2+c_i\eta_2^2\ (i=1, 2, 3) \tag{7}$$

három olyan alak, melyek nem egy síkban fekvő, a P_0 ponton keresztülmenő egyenesekhez tartoznak. Ha d_{ii} valós, akkor d_{ik} is valós. A P_0 ponton keresztülmenő tetszőleges egyeneshez tartozó alak ilyen:

$$f_l = l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3 \tag{8}$$

diametrális alakok esetében a (7)-nek megfelel pl. $f_1 = \eta_1^2 - \eta_2^2$, $f_2 = i\eta_1^2 + i\eta_2^2$; $f_3 = \eta_1 \eta_2$.

Az $f_1 f_2$, $f_1 f_3$ és $f_3 f_1$ egyenesek által meghatározott síkok legyenek: φ_3, φ_1, φ_2,

$$\varphi_i = \alpha_i \eta_1 \bar{\eta}_1 + \beta_i \eta_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\beta}_i \bar{\eta}_1 \eta_2 + \gamma_i \eta_2 \bar{\eta}_2 . \tag{9}$$

A φ_i a IV. fejezet (4) alapján határozható meg.

A P_0 ponton keresztülmenő tetszőleges síkhoz tartozó HERMITE-féle alak, ilyen:

$$\varphi_\lambda = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 . \tag{10}$$

Az l_i és λ_i paramétereknek valósaknak kell lenniök.

Határozzuk meg először az f_i polárisát. Ez azon egyenesek által meghatározott sík, melyek a P_0-on mennek keresztül és az f_i-re merőlegesek. Legyen két ilyen egyenes a következő:

$$\begin{aligned} f_m &= m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 \\ f_n &= n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3 . \end{aligned} \tag{11}$$

A merőlegesség feltétele:

$$\begin{aligned} m_1 d_{1i} + m_2 d_{2i} + m_3 d_{3i} &= 0 \\ n_1 d_{1i} + n_2 d_{2i} + n_3 d_{3i} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

A (11) által meghatározott sík a IV. fejezet (4) alapján ilyen alakú:

$$\Phi_i = (m_2 n_3 - m_3 n_2)\varphi_1 + (m_3 n_1 - m_1 n_3)\varphi_2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)\varphi_3$$

s így a (12) alapján az f_i polárisa:

$$\Phi_{1i} = d_{1i}\varphi_1 + d_{2i}\varphi_2 + d_{3i}\varphi_3 . \tag{13}$$

A (8) polársíkjának meghatározása ettől annyiban különbözik, hogy d_{ki} helyett: $l_1 d_{k1} + l_2 d_{k2} + l_3 d_{k3}$ irandó s így a (8) polárisa:

$$\Phi_l = l_1\Phi_1 + l_2\Phi_2 + l_3\Phi_3. \tag{14}$$

Ha a P_0-n keresztülmenő síkokból indultunk volna ki, vagyis a (9) és (10)-ből, akkor a II. fejezet (7) alapján meghatározhatók a $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_2\varphi_3$ és $\varphi_3\varphi_1$ metszésvonalaihoz tartozó alakok: f_3, f_1, f_2.

A φ_i-hez tartozó polus az előbbiekhez hasonló módon meghatározható:

$$F_i = \delta_{1i} f_1 + \delta_{2i} f_2 + \delta_{3i} f_3$$

és így a (10)-hez tartozó polus:

$$F_\lambda = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3. \tag{15}$$

Az egységsugarú gömbön kívül fekvő ponton keresztülmenő egyenesek és síkok geometriájának vizsgálatánál kiindulópontul az y tengelylyel párhuzamos egyeneseket választhatjuk, vagyis azon quadratikus alakokat, melyeknek együtthatói valósak és diszkriminánsuk kisebb a zérusnál, tehát negativ. E feltételnek megfelelő egyenesek az y tengely végtelenben fekvő pontján mennek keresztül.

Legyen:

$$f_i = a_i\eta_1^2 + b_i\eta_1\eta_2 + c_i\eta_2^2, \quad i=1, 2, \quad d_{ii} < 0 \tag{16}$$

két ilyen alak. A közös merőleges:

$$F_3 = 2C_3\eta_3^2 - 4B_3\eta_1\eta_2 + 2A_3\eta_2^2 \tag{17}$$

és a (16) által meghatározott sík a IV. fejezet (6)′ alapján:

$$\varphi_3 = C_3\eta_1\bar{\eta}_1 - B_3\eta_1\bar{\eta}_2 - B_3\bar{\eta}_1\eta_2 + A_3\eta_2\bar{\eta}_2. \tag{18}$$

A (6)′ másik tényezője:

$$\varphi_3' = \eta_1\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1\eta_2 \tag{18$'$}$$

ez utóbbi az $y = 0$ sík.

Abban az esetben, mikor az egyenesek egymást a gömbön kívül metszik, a közös merőleges a két egyenes által meghatározott síkban fekszik, mert a (17) nem más, mint a (18) és

(18)' metszésvonala. Ugyanis két egyenesnek két közös normálisa van, az egyik nem metszi a gömböt, a másik metszi és ez utóbbi az előbbinek poláris egyenese. Diametrális alakok esetében azon normálist kapjuk, mely a két egyenes által meghatározott síkra is merőleges, ebben az esetben pedig a (17) az előbbinek a poláris egyenese, mely tehát az y tengely végtelenben fekvő pontjának polársíkjában és a (18)-ban fekszik, vagyis: $B_3^2-A_3C_3>0$.

Legyen tehát adva a

$$\varphi=\alpha\eta_1\bar{\eta}_1+\beta\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma\eta_2\bar{\eta}_2 \tag{19}$$

sík, mely az y tengelylyel párhuzamos, ha $\beta=\bar{\beta}$, akkor e sík valós körben metszi a gömböt, ha: $\beta^2-\alpha\gamma>0$ és akkor a (19) polusa a (18) és (17) alapján:

$$f=\alpha\eta_1^2+2\beta\eta_1\eta_2+\gamma\eta_2^2 \tag{20}$$

ez a (20) a (18)' és (19) metszésvonala.

Ha ellenben: $\beta^2-\alpha\gamma<0$, akkor a megfelelő kör képzetes és a polus megint a (20) lesz, de ez most már a (18)' és (19) metszésvonalának poláregyenese, vagyis az y tengelylyel párhuzamos egyenes.

Legyen most már az

$$f=a\eta_1^2+b\eta_1\eta_2+c\eta_2^2 \tag{21}$$

adva; akkor, ha $b^2-4ac<0$, a (21) polárisa:

$$\varphi=2a\eta_1\bar{\eta}_1+b\eta_1\bar{\eta}_2+b\bar{\eta}_1\eta_2+2c\eta_2\bar{\eta}_2 \tag{22}$$

lesz, mely nem metszi a gömböt valós körben; ha $b^2-4ac>0$, akkor a (22) valós kört jelent.

Ezen viszonyok a (6) alkalmazásával a gömbön kívül fekvő P_0' tetszőleges ponton keresztülmenő egyenesek geometriájára átvihető, hol az y tengelylyel párhuzamos egyenesek és síkok egy a végesben fekvő ponton mennek keresztül.

A tárgyalás úgy is végezhető, mint az előbbi a (8) és (10) alapján, a (8) és (14), (10) és (15) értelme itt is ugyanaz a megfelelő változtatások elvégzése után.

Ha a P''_0 pont a gömb felületén fekszik, akkor e ponton keresztülmenő minden síknak, illetőleg körnek polusa maga a P''_0, mert két egyenes közös merőlegese határozatlan, amennyiben az nem más, mint a P''_0-höz húzható érintő. Bármely egyeneshez tartozó alak polársíkja a P''_0-höz húzható érintő sík, a megfelelő HERMITE-féle alak két tényezőre bomlik s csak a P''_0 pont elégíti ki.

Most áttérünk a legáltalánosabb esetre. Legyen:

$$f_i = a_i\eta_2^2 + b_i\eta_1\eta_2 + c_i\eta_2^2 \quad i=1, 2, 3 \tag{23}$$

három olyan quadratikus alak, melyeknek diszkriminánsaik valósak, de a d_{ik} szimultán invariánsok legyenek tetszőleges komplex mennyiségek, szóval a (23) egyenesek ne messék egymást egy pontban. Ha l_1 l_2 l_3 valós mennyiségek, vizsgáljuk meg az

$$f_l = l_1f_1 + l_2f_2 + t_3f_3 \tag{24}$$

egyenesek geometriáját. Két egyenes hajlásszögét értelmeztük már. Az f_1f_2, f_2f_3, f_3f_1 egyenespárok által meghatározott másodrendű vonalfelületek, melyek metsző egyenesek esetében a megfelelő síkpároknak felelnek meg, a IV. fejezet (6) és (6)' alapján meghatározhatók s jelöljük ezeket: φ_3 φ_1 φ_2-vel.

Vegyünk a (24) rendszerből két egyenest:

$$\begin{aligned} f_m &= m_1f_1 + m_2f_2 + m_3f_3 \\ f_n &= n_1f_1 + n_2f_2 + n_3f_3. \end{aligned} \tag{25}$$

Ezek a

$$\varphi_{mn} = (m_2n_3 - m_3n_2)\,\varphi_1 + (m_3n_1 + m_1n_3)\,\varphi_1 + (m_1n_2 - m_2n_1)\,\varphi_3 \tag{26}$$

másodrendű HERMITE-féle alakot határozzák meg. Hogy az előbbiekkel összhangban maradjunk, a (26) polusa alatt a (25) közös normálisát kell érteni. Határozzuk ezt meg.

Ugyanis a (25) függvénydeterminánsa:

$$F_{mn} = (m_2n_3 - m_3n_2)\,F_1 + (m_3n_1 - m_1n_3)\,F_2 + (m_1n_2 - m_2n_1)\,F_3, \tag{27}$$

hol F_1, F_2, F_3, az f_2f_3 f_3f_2 és f_1f_2 közös normálisai, de ezek a normálisok nem tartoznak már (24) rendszerbe, mert egyszerűen meggyőződhetünk, hogy:

$$F_i = D_{1i}f_1 + D_{2i}f_2 + D_{3i}f_3 \quad i=1, 2, 3 \tag{28}$$

s itt D_{ik} nem más, mint a $|d_{ik}|_{\substack{i=1,2,3\\k=1,2,3}}$ determináns d_{ik}-hoz tartozó aldeterminánsa, tehát D_{ik} általában komplex mennyiség.

Ezekből látjuk, hogy a (26) polusa a (27), és viszont. Tehát a (8) és (14) a (10) és (15) alakok értelme a legáltalánosabb esetben is megmarad.

Projektiv geometriai szempontból az eddigi eredményeket következőképen értelmezhetjük:

Legyen P_0 a gömbön belül lévő pont, melyen az egyenesek és síkok keresztül mennek. A P_0 pont polársíkja legyen S_0. Határozzuk meg a gömbön lévő P pontnak polárkörét. A PP_0 metszi az S_0-t P'-ben, a P' polársíkja metszi a gömböt a P polárkörében: S-ben. Ha adva van az S polárkör, akkor e kör síkjának polusa az S_0-ban fekszik; legyen ez a pont: P'; akkor a $P'P_0$ metszi a gömböt a P pontban, mely az S polusa; a $P'P_0$ másik metszéspontja az S ellenpolusa.

Ha P_0 a gömbön kívül fekszik, akkor a P-hez tartozó S polárkör meghatározása ugyanaz, mint az előbb, csakhogy, ha P valós pont, akkor az S képzetes, ha pedig S van adva és ez valós, akkor a polust az SS_0 metszésvonal metszi ki a gömbből, mely egyenes az előbbi $P'P_0$ poláregyenese a gömbre vonatkozólag.

Ha az egyenesek nem mennek egy ponton keresztül és a (24) rendszert alkotják, akkor ehhez tartozik a közös normálisokból alkotott (27) rendszer. A (24) rendszer két-két egyenese meghatározza a (26) másodrendű vonalfelületekből álló rendszert. A (26)-ot azon egyenesek alkotják, melyek a (24)-hez tartoznak és a (27)-re merőlegesek. Ebből a szempontból kell a (27)-et a (26) polusának neveznünk. Geometriailag tehát azon egyenes metszi ki a (26) polusát a gömbből, mely a (26) két alkotóját és ezek polár egyeneseit metszi; ez metszi a többi alkotót is s ez a (27). Ha a (27)-ből indulunk ki, akkor e polus polárisát azon egyenesek metszik ki a gömbből, melyek a (27)-re merőlegesek és a (24)-hez tartoznak.

VI. A szferikus trigonometria.

Az első és második fejezetben két egyenes, illetőleg két sík hajlásszögét határoztuk meg a quadratikus és Hermite-féle alakok segítségével. A két hajlásszög képlete megadja az alapot a közönséges szferikus trigonometria formuláinak megállapítására és a szferikus trigonometria általánosítására.

Mindenekelőtt felmerül az a kérdés, mit értünk szferikus háromszög alatt és hogyan általánosítjuk ezt. Legyen adva három quadratikus alak:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1\eta_1^2+b_1\eta_1\eta_2+c_1\eta_2^2 \\ f_2 &= a_2\eta_1^2+b_2\eta_1\eta_2+c_2\eta_2^2 \\ f_3 &= a_3\eta_1^2+b_3\eta_1\eta_2+c_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy ezek egy P_0 ponton keresztülmenő, de nem egy síkban fekvő egyeneseket határoznak meg s az (1) diszkriminánsai legyenek valós pozitiv mennyiségek: $d_{ii}>0$ $i=1,2,3$.

Legyen P_0 a gömb középpontja az (1) tehát jelentsen diametrális alakokat, vagyis:

$$c_i = -\bar{a}_i \quad b_i = \bar{b}_i = 1 - a_i\bar{a}_i\,; \; (i=1,2,3) \tag{2}$$

Akkor az (1) a (2) feltételek mellett olyan triéder éleit jelenti, melynek csúcspontja P_0 a gömb középpontja.

Az (1)-hez tartozik három Hermite-féle alak, melyek a IV. fejezet (11) szerint a következők:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= iB_1\eta_1\bar{\eta}_1+iC_1\eta_2\bar{\eta}_2-iA_1\bar{\eta}_1\eta_2-iB_1 \\ \varphi_2 &= iB_2\eta_1\bar{\eta}_1+iC_2\eta_1\bar{\eta}_2-iA_2\bar{\eta}_1\eta_2-iB_2 \\ \varphi_3 &= iB_3\eta_1\bar{\eta}_1+iC_3\eta_1\bar{\eta}_2-iA\bar{\eta}_{31}\eta_2-iB_3 \end{aligned} \tag{3}$$

hol az A_k B_k C_k együtthatók az

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

determináns a_k b_k c_k elemeihez tartozó aldeterminánsok és a (2) alapján $A_k = \bar{C}_k$. A (3)-hoz tartozó körök síkjai a P_0 ponton mennek keresztül és így e körök legnagyobb gömbkörök. A megfelelő síkok az (1) által meghatározott triéder lapjai. Tehát az (1) és (3)-hoz tartozó triéder kimetszi a gömbből a megfelelő gömbháromszöget, melynek oldalai a (3) által meghatározott legnagyobb körök ívei, melyek az (1) zérus pontjait kötik össze. Az (1) és (3) azonban nem határozza még meg a gömbháromszöget egyértelműen. A pontosabb meghatáozást az (1) diszkiminánsai négyzetgyökének előjele adja meg, melyre későbben térünk rá.

Az (1) még három quadratikus alakot határoz meg, az (1) kovariánsait:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2C_1\eta_1^2-4B_1\eta_1\eta_2+2A_1\eta_2^2 \\ F_2 &= 2C_2\eta_1^2-4B_2\eta_1\eta_2+2A_2\eta_2^2 \\ F_3 &= 2C_3\eta_1^2-4B_3\eta_1\eta_2+2A_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Ezek is diametrális alakok, ha a (2) feltételek teljesülnek. Geometriai jelentésüket ismerjük már az I. fejezetből, az F_1 nem más, mint az f_2 f_3 egyenesek közös normálisa, tehát a φ_1 polusa; hasonlóképen az F_2 a φ_2 polusa, az F_3 a φ_3 polusa.

Az (5)-höz tartozó HERMITE-féle alakokat úgy képezzük az (5)-ből, a hogy a (3)-t alkottuk az (1)-ből; tehát:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= b_1\eta_1\bar{\eta}_1-2a_1\eta_1\bar{\eta}_2+2c_1\bar{\eta}_1\eta_2-b_1\eta_2\bar{\eta}_2 \\ \Phi_2 &= b_2\eta_1\bar{\eta}_1-2a_2\eta_1\bar{\eta}_2+2c_2\bar{\eta}_1\eta_2-b_2\eta_2\bar{\eta}_2 \\ \Phi_3 &= b_3\eta_1\bar{\eta}_1-2a_3\eta_1\bar{\eta}_2+2c_3\eta_1\bar{\eta}_2-b_3\eta_2\bar{\eta}_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Az (5) és a (6) alakok meghatározzák az (1) és (3) polártriéderét, illetőleg a polárháromszöget. Az V. fejezet (2)′ alapján látjuk, hogy a (6) az (1) polárköreit jelenti. A későbbiekre nézve fontos az, hogy az (1) és (6), a (3) és (5) diszkriminánsai és szimultán invariánsai egyenlők.

Eddig a quadratikus alakokból kiindulva határoztuk meg a gömbháromszöget és a hozzátartozó triédert. Kiindulhatunk azonban a HERMITE-féle alakokból is. Legyen tehát adva három HERMITE-féle alak:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \alpha_1\eta_1\bar{\eta}_1+\beta_1\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}_1\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma_1\eta_2\bar{\eta}_2 \\
\varphi_2 &= \alpha_2\eta_1\bar{\eta}_1+\beta_2\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}_2\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma_2\eta_2\bar{\eta}_2 \qquad (7)\\
\varphi_3 &= \alpha_3\eta_1\bar{\eta}_1+\beta_3\eta_1\bar{\eta}_2+\bar{\beta}_3\bar{\eta}_1\eta_2+\gamma_3\eta_2\bar{\eta}_2.
\end{aligned}
$$

Ha:

$$\alpha_i+\gamma_i = 0 \quad i=1,2,3, \qquad (8)$$

akkor a (7)-nek megfelelő körök legnagyobb gömbkörök s a hozzátartozó síkok a gömb középpontján P_0-n mennek át.

A jelen esetben a (7) meghatározza a triéder és így a gömbháromszög oldalait.

A (7)-hez tartozik három quadratikus alak, melyeket úgy kapunk, ha a (7) két-két alakjából az $\bar{\eta}_1 : \bar{\eta}_2$ viszonyt kiküszöböljük. Ezek az alakok a II. fejezet (7) egyenletei alapján a következők:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \Gamma_1\eta_1^2-(B_1+B_1')\,\eta_1\eta_2+A_1\eta_2^2 \\
f_2 &= \Gamma_2\eta_1^2-(B_2+B_2')\,\eta_1\eta_2+A_2\eta_2^2 \qquad (9)\\
f_3 &= \Gamma_3\eta_1^2-(B_3+B_3')\,\eta_1\eta_2+A_3\eta_1^2
\end{aligned}
$$

hol az A_k B_k B_k' Γ_k együtthatók az

$$
\left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \bar{\beta}_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \bar{\beta}_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \bar{\beta}_3 & \gamma_3 \end{matrix}\right\|
$$

matrix α_k β_k $\bar{\beta}_k$ γ_k elemeihez tartozó másodrendű determinánsai és pedig: pl.

$$
A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad B_1 = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 \quad B_1' = \begin{vmatrix} \beta_2 & \bar{\beta}_2 \\ \beta_3 & \bar{\beta}_3 \end{vmatrix} \quad \Gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}
$$

Ha a (8) feltételek teljesülnek, akkor: $B_k = 0$. $\Gamma_k = \bar{A}_k$. A (9) egyenesek a (7)-hez tartozó körök metszéspontjait kötik össze, tehát ezek a triéder élei.

A (7) két-két alakjához tartozik olyan alak, melynek megfelelő köre szintén legnagyobb kör és a (7)-nek két körére merőleges. Ezen alaknak megfelelő kör a (9) egy alakjának polárisa. Ezek a Hermite-féle alakok az V. fejezet (1)′ (2)″ egyenletei szerint a következők:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -B'_1\eta_1\bar{\eta}_1-2\Gamma_1\eta_1\bar{\eta}_2+2A_1\bar{\eta}_1\eta_2+B'_1\eta_2\bar{\eta}_2\\ \Phi_2 &= -B'_1\eta_1\bar{\eta}_1-2\Gamma_2\eta_1\bar{\eta}_2+2A_2\bar{\eta}_1\eta_2+B'_2\eta_2\bar{\eta}_2\\ \Phi_3 &= -B'_3\eta_1\bar{\eta}_1-2\Gamma_3\eta_1\bar{\eta}_2+2A_3\bar{\eta}_1\eta_2+B'_3\eta_2\bar{\eta}_2.\end{aligned} \tag{10}$$

Ezen alakok a polárháromszög oldalait határozzák meg. A (10) metszésvonalai pedig a polárháromszög csúcspontjait metszik ki a gömbből. A (10) metszésvonalai a (7) polusai is azért következik az V. fejezet (2)″ és (1)″ egyenleteiből, hogy az F_1 F_2 F_3 alakok a következők:

$$\begin{aligned}F_1 &= \beta_2\eta_1^2-2\alpha_1\eta_1\eta_2-\bar{\beta}_1\eta_2^2\\ F_2 &= \beta_2\eta_1^2-2\alpha_2\eta_1\eta_2-\bar{\beta}_2\eta_2^2\\ F_3 &= \beta_3\eta_1^2-2\alpha_3\eta_1\eta_2-\bar{\beta}_3\eta_2^2.\end{aligned} \tag{11}$$

Itt is azt látjuk, hogy a (7) és (11) (9) és (10) invariánsai egyenlők, tekintettel arra, hogy: $B_k = 0$.

A (9)-ben azért írtuk ki külön a B_k determinánst is, mert azon alakok általánosságban is érvényesek, míg a (10) csak diametrális alakok esetében érvényes.

Ezzel a közönséges háromszög a gömbön teljesen meg van határozva, a mennyire ez eddig lehetséges volt.

Ha az eddigi összes alakokra, melyek e fejezetben előfordultak, az V. fejezet (6) transzformáczióját alkalmazzuk, akkor a megfelelő diameterek és diametrális síkok a gömb belsejében lévő a középponttól különböző ponton mennek keresztül, melyet ismét P_0-al jelölünk. A fenti alakok geometriai értelme megmarad. A legnagyobb gömbkörök helyébe azon körök lépnek, melyeknek síkja a P_0 ponton megy keresztül. Az ily módon általánosított gömbgeometria megegyezik most azon elliptikus geometriával, mely a P_0 sugárpont- illetőleg síkpontban képződik s melynek imaginárius abszolut kúpja a gömböt azon imaginárius abszolut körön érinti, melyben a P_0 polársíkja a gömböt metszi. Az ily módon általánosított szferikus geometria a gömbfelületen lévő elliptikus jellegű geometriával megegyezik, melynek abszolut köre a fent említett imaginárius kör. A közönséges szferikus trigonometriában ez az abszolut imaginárius kör a végtelenben fekvő gömbkör. A fenti (1) és (7) alakok helyébe az V. fejezet (8) és (10) alakjai lépnek. Megjegyzendő még, hogy ha a P_0 a gömbön belül fekszik, akkor a P_0 ponton keresztülmenő egyenesek és síkok mindig valós pontokban és körökben metszik a gömböt, tehát a P_0 sugárpont illetőleg síkpont és a gömb metszéséből keletkező gömb geometria háromszögei mindig valós oldalakkal és szögekkel birnak.

Értelmezzük a gömbháromszöget abban az esetben, mikor a P_0 a gömbön kívül fekszik. Kiindulópontul válaszszuk azon esetet, mikor a quadratikus alakok együtthatói valósak és a diszkriminánsuk negativ.

Legyen tehát:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1\eta_1^2+b_1\eta_1\eta_2+c_1\eta_2^2, \\ f_2 &= a_2\eta_1^2+b_2\eta_1\eta_2+c_2\eta_2^2, \\ f_3 &= a_3\eta_1^2+b_3\eta_1\eta_2+c_3\eta_2^2, \end{aligned} \tag{12}$$

hol $a_ib_ic_i$ valós mennyiségek és $d_{ii}<0$ $(i=1, 2, 3)$. A (12)-nek megfelelő egyenesek az y tengelylyel párhuzamosak, tehát P_0 az y tengely végtelenben fekvő pontja.

A (12)-höz tartozó Hermite-féle alakok az V. fejezet (18) alapján:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1\eta_1\bar\eta_1-B_1\eta_1\bar\eta_2-B_1\bar\eta_1\eta_2+A_1\eta_2\bar\eta_2, \\ \varphi_2 &= C_2\eta_1\bar\eta_1-B_2\eta_1\bar\eta_2-B_2\bar\eta_1\eta_2+A_2\eta_2\bar\eta_2, \\ \varphi_3 &= C_3\eta_1\bar\eta_1-B_3\eta_1\bar\eta_2-B_3\bar\eta_1\eta_2+A_3\eta_2\bar\eta_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Itt is a (12) és (13) egy triédert határoz meg, mely most tulajdonképen hasábos felület, mert a csúcsa a végtelenben fekszik, a (12) az élek alakjai, a (13) pedig az oldalakat határozzák meg. A triédert a gömbbel metszésbe hozva a (12) kimetszik a gömbháromszög csúcsait s a (13) a csúcsokat összekötő köröket, melyek mind párhuzamosak az y tengelylyel.

A (12) kovariansai rendre:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2C_1\eta_1^2-4B_1\eta_1\eta_2+2A_1\eta_2^2, \\ F_2 &= 2C_2\eta_1^2-4B_2\eta_1\eta_2+2A_2\eta_2^2, \\ F_3 &= 2C_3\eta_1^2-4B_3\eta_1\eta_2+2A_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Az F_i diszkriminánsa a (12) megfelelő két alakjának reszultánsa, ha ez eltűnik, akkor a (12) két egyenese a gömbfelületén metszi egymást, ha negativ, akkor a gömbön belül metszik egymást, például diametrális alakok esetében, ha e reszultáns pozitiv, akkor a gömbön kívül metszik egymást. Tehát a mi esetünkben a (14) diszkriminánsai pozitiv mennyiségek s így a (14)-nek megfelelő egyenesek az $y=0$ síkban fekszenek, vagyis a P_0 polársíkjában s látjuk, hogy a (14) egyenesek a (13) síkokban is fekszenek. Tehát a közös normálisok közül nem azokat kaptuk most, melyek a P_0 ponton mennek keresztül, hanem azokat, melyek az előbbiek polárisai és az illető két egyenes síkjában fekszenek. A (12) rendszer közös normálisai ebben az esetben a P_0 polársíkjában fekvő egyenesek. A (12) és (13)-hoz tartozó triéder polártriédere tehát egy síkban fekvő három egyenesből áll. A (13) körök polusai gyanánt ezeket a (14) alakokat kell tekinteni. A (14) két-két egyenese által meghatározott sík, illetve kör nem az $y=0$ sík, illetve ennek köre lesz, hanem mivel e köröknek a (12) polárisainak kell lenniök, azért a (14) által meghatározott síkoknak a következő Hermite-féle alakokat kell tekinteni:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= 2a_1\eta_1\bar{\eta}_1+b_1\eta_1\bar{\eta}_2+b_1\bar{\eta}_1\eta_2+2c_1\eta_2\bar{\eta}_2,\\
\Phi_2 &= 2a_2\eta_1\bar{\eta}_1+b_2\eta_1\bar{\eta}_2+b_2\bar{\eta}_1\eta_2+2c_2\eta_2\bar{\eta}_2,\\
\Phi_3 &= 2a_3\eta_1\bar{\eta}_1+b_3\eta_1\bar{\eta}_2+b_3\bar{\eta}_1\eta_2+2c_3\eta_2\bar{\eta}_2.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Ezen alakoknak megfelelő síkok a gömböt nem metszik valós körökben s metszési vonalaik a II. fejezet (7) egyenletei alapján a (14) lesznek, de ezek nem az igazi metszési vonalai a (15) síkoknak, hanem a gömbre vonatkoztatott poláregyenesei. A (12)-höz tartozó polártriéder síkjai a (15), ennek éleit quadratikus alakokkal nem lehet meghatározni, csak ezek poláris egyeneseit a (14) alapján.

Míg a gömbön belül lévő ponton keresztülmenő egyenesek és síkok esetében a quadratikus és Hermite-féle alakok által meghatározott gömbháromszögek lényegében azonosak voltak geometriai jellegükre nézve, addig a jelen esetben máskép áll a dolog.

Legyen tehát adva három az y tengelylyel párhuzamos sík, illetőleg kör:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_1\eta_1\bar\eta_1+\beta_1\eta_1\bar\eta_2+\beta_1\bar\eta_1\eta_2+\gamma_1\eta_2\bar\eta_2, \\ \varphi_2 &= \alpha_2\eta_1\bar\eta_1+\beta_2\eta_1\bar\eta_2+\beta_2\bar\eta_1\eta_2+\gamma_2\eta_2\bar\eta_2, \\ \varphi_3 &= \alpha_3\eta_1\bar\eta_1+\beta_3\eta_1\bar\eta_2+\beta_3\bar\eta_1\eta_3+\gamma_3\eta_2\bar\eta_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Ezen Hermite-féle alakokhoz három quadratikus alak tartozik, a melyeket a (9)-ből kapunk, ha tekintetbe veszszük, hogy most $B'_k = 0$, tehát:

$$\begin{aligned} f_1 &= \Gamma_1\eta_1^2-B_1\eta_1\eta_2+A_1\eta_2^2, \\ f_2 &= \Gamma_2\eta_1^2-B_2\eta_1\eta_2+A_2\eta_2^2, \\ f_3 &= \Gamma_3\eta_1^2-B_3\eta_1\eta_2+A_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{17}$$

Mivel:

$$d_{ii} = B_i^2-4A_i\Gamma_i = \tfrac{1}{4}(\delta_{kl}^2-\delta_{kk}\delta_{ll}), \tag{18}$$

azért ebből következik, hogy ha a (16) körök valós pontokban metszik egymást, akkor a (17) egyenesek az y tengelylyel párhuzamos egyenesek, tehát a metszéspontokat kötik össze, ha pedig a (16)-nak megfelelő síkok metszésvonalai a gömböt nem metszik, vagyis a körök imaginarius pontokban metszik egymást, akkor a (17) diszkriminánsai a (18) szerint pozitivok s így a (17) a (16)-hoz tartozó síkok metszésvonalainak poláris egyeneseit jelenti, más szóval a (17) a (16) körök középpontjait összekötő egyenesek alakjait jelenti, melyek ismét az $y=0$ síkban fekszenek. Ebben az esetben olyan háromszögekhez jutunk, melyeknek oldalai egymást valós pontokban nem metsző körök. E háromszögek csúcspontjai gyanánt az előbbiek szerint e körök középpontjai tekintendők. Ha a körök érintik egymást, akkor még ez az érintési pont a csúcspont. Schilling a különböző ilyen fajta háromszögtipusokat a Schwarz-féle «s» függvénynyel kapcsolatosan vizsgálta.[1]

---

[1] Az előbb említett értekezésben.

A (17) polárisai az V. fejezet (21), (22) szerint:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 2\Gamma_1\eta_1\bar{\eta}_1 - B_1\eta_1\bar{\eta}_2 - B_1\bar{\eta}_1\eta_1 + 2A_1\eta_2\bar{\eta}_2, \\ \Phi_2 &= 2\Gamma_2\eta_1\bar{\eta}_1 - B_2\eta_1\bar{\eta}_2 - B_2\bar{\eta}_1\eta_2 + 2A_2\eta_2\bar{\eta}_2, \\ \Phi_3 &= 2\Gamma_3\eta_1\bar{\eta}_1 - B_3\eta_1\bar{\eta}_2 - B_3\bar{\eta}_1\eta_2 + 2A_3\eta_2\bar{\eta}_2. \end{aligned} \tag{19}$$

A (16) polusai az V. fejezet (19), (20) alapján:

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha_1\eta_1^2 + 2\beta_1\eta_1\eta_2 + \gamma_1\eta_2^2, \\ F_2 &= \alpha_2\eta_1^2 + 2\beta_2\eta_1\eta_2 + \gamma_2\eta_2^2, \\ F_3 &= \alpha_3\eta_1^2 + 2\beta_3\eta_1\eta_2 + \gamma_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{20}$$

A (19) síkok az $y=0$ síkból metszik ki a (17)-et és a (20) a (16)-nak és az $y=0$ síknak a metszésvonalai. Megjegyzendő, hogy az $y=0$ síknak megfelelő HERMITE-féle alak:

$$i\eta_1\bar{\eta}_2 - i\bar{\eta}_1\eta_2 = 0. \tag{21}$$

A (19) és (20) határozza meg a polártriédert, az előbbi értelmezés szerint. Itt is látjuk, hogy a (16) és (20) a (17) és (19) invariánsai rendre egyenlők.

Ha a (12)-re és (16)-ra alkalmazzuk az V. fejezet (7) transzformácziót, akkor az y tengely végtelenben fekvő pontja P_0 a gömbön kívül fekvő általában a végesben fekvő P_0 pontba megy át s így az eddig tárgyalt viszonyok ezen P_0 sugárpontra, illetőleg síkpontra teljesen érvényben maradnak. A (21) mint az y tengely végtelenben fekvő pontjának polársíkja átmegy a transzformált új P_0 pont polársíkjába. A (12) és (16) helyébe az V. fejezet (8) és (10) alakjai írhatók, ha az ott szereplő f_k, φ_k egyenesek és a síkok a P_0 ponton mennek keresztül. Az ily módon általánosított szferikus geometria megegyezik a gömbfelületén lévő azon hyperbolikus jellegű geometriával, melynek abszolut köre a gömbön kívül fekvő P_0 polársíkjának és a gömbnek metszésköre, vagy pedig azon hyperbolikus jellegű geometriával, mely a P_0 sugárponton, illetőleg síkponton képződik, ha az abszolut kúp a gömböt az előbb körülírt abszolut kör mentén érinti.

Az eddig tárgyalt két eset határesete az, mikor a P_0 a gömbfelületen fekszik, akkor a gömbön a parabolikus geometriával megegyező geometriát kapunk.

Most már áttérünk a legáltalánosabb esetre, mikor a három quadratikus alaknak megfelelő egyenesek nem metszik egymást, mikor tehát mind a három egyenes kitérő egyenes.

Legyen tehát adva három quadratikus alak:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1\eta_1^2+b_1\eta_1\eta_2+c_1\eta_2^2, \\ f_2 &= a_2\eta_1^2+b_2\eta_1\eta_2+c_3\eta_2^2, \\ f_3 &= a_3\eta_1^2+b_3\eta_1\eta_2+c_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Felteszszük, hogy ezen alakok diszkriminánsai valós mennyiségek. Ezen alakok egy-egy zéruspontjának a gömbön egy-egy pont felel meg, mely pontokat a gömbháromszög csúcspontjainak tekintünk. A (22)-höz tartozó egyeneseket pedig a gömbháromszöghöz tartozó triéder éleinek tekintjük.

A triéder oldallapjai alatt értjük az

$$\begin{aligned} f'_1 &= l'_2 f_2+l'_3 f_3, \\ f''_2 &= l''_3 f_3+l''_1 f_1, \\ f'''_3 &= l'''_1 f_1+l'''_2 f_2 \end{aligned} \tag{23}$$

torzseregeket, hol az

$$l'_3 : l'_2, \quad l''_1 : l''_3, \quad l'''_2 : l'''_1$$

viszonyok valós mennyiségek. A (23) torzseregek zéruspontjait meghatározzák a IV. fejezet (6) és (6)′ alapján ezen másodrendű Hermite-féle alakok:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= i(f_2\bar{f}_3-f_3\bar{f}_2), \\ \varphi_2 &= i(f_3\bar{f}_2-f_1\bar{f}_3), \\ \varphi_3 &= i(f_1\bar{f}_2-f_2\bar{f}_1). \end{aligned} \tag{24}$$

A (22)-höz tartozó közös normálisok alakjai:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2C_1\eta_1^2-4B_1\eta_1\eta_2+2A_1\eta_2^2, \\ F_2 &= 2C_2\eta_1^2-4B_2\eta_1\eta_2+2A_2\eta_2^2, \\ F_3 &= 2C_3\eta_1^2-4B_3\eta_1\eta_2+2A_3\eta_2^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Ezek az V. fejezet (28) alatt írt alakban is írhatók.

Ha $l_1 l_2 l_3$ olyan három mennyiség, hogy az $l_1 : l_2 : l_3$ viszonyok valósak, akkor a (23) torzseregekhez tartozó összes egyenesek az

$$f_l = l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3 \tag{22}$$

rendszerhez tartoznak. A (22)′ tulajdonképen kongruenczia. Tehát a triéder oldalai alatt azon egyeneseket értjük, melyek ha (22)′ kongruencziához tartoznak és a (25) egyenesekre neeuklidikus értelemben merőlegesek s ezen egyenesek rendre egy-egy másodrendű vonalfelület alkotó serege. Ezen vonalfelületek és a gömb áthatásának pontjai kielégítik a (24) alakokat s így a (24) alatt a gömbháromszög oldalait kell érteni. Ha a (24) van adva a IV. fejezet (7) alakjában, akkor ugyanezen fejezet (9) egyenletei alapján a (25) meghatározható és ezek közös normálisai a (22) egyenesek.

A (22)-höz tartozó polárháromszög csúcspontjait a (25) határozzák meg, melyek egyszersmind a polártriéder éleit alkotják. Ha továbbá a (25) alakokat rendre diszkriminánsaik négyzetgyökének konjugált értékeivel szorozzuk, akkor az így nyert alakok diszkriminánsai valósak s akkor a (25)-ből alkossuk meg a (23)-hoz hasonló módon a megfelelő alakokat, az azoknak megfelelő egyenesek szintén torzseregeket alkotnak, melyek a polártriéder oldalai s a gömbből a polárháromszög oldalait metszik ki. A megfelelő másodrendű alakok a (24) mintájára irhatók fel.

Ezen az alapon tehát sikerült a gömbháromszöget a legáltalánosabb módon értelmezni. Ez az általánosítás nincs ellenmondásban a már előbb tárgyalt két esettel, mert ha a (22) egyenesek egy P_0 ponton mennek keresztül, akkor $d_{12} d_{23} d_3$, is valós és így a (23) sugársort jelent, melynek síkja a megfelelő egyenesek által meghatározott sík, a (24) pedig a IV. fejezet szerint két elsőrendű Hermite-féle alakra bomlik, melyek közül az egyik tényező a két megfelelő egyenes által meghatározott sík, a triéder és a gömbháromszög oldala, a másik tényező pedig a (22)′ kongruenczia, illetőleg most sugárpont összes egyenes párjaira állandó tényező: a P_0 polársíkja és a gömbbel való metszési köre.

Mi lép ezen általános esetben a P_0 és ennek S_0 polársíkja helyébe? Ha a P_0 a gömbön belül fekszik, akkor az ezen ponton keresztülmenő egyenesek közös normálisainak egyik serege szintén a P_0 ponton megy keresztül, a másik sereg a P_0 polársíkjában fekszik. Tehát azt mondhatjuk, hogy ha a (22) egyenesek nem mennek egy P_0 ponton keresztül, akkor a P_0 sugárpont helyébe lép a (25) közös normálisokból álló kongruenczia, a P_0 polársíkja helyébe pedig a (25) normálisok poláregyeneseiből alkotott kongruenczia s az abszolut kör helyébe e kongruenczia egyenesek és a gömb metszéspontjai lépnek s igy az ily módon nyert szferikus geometriát sem elliptikusnak, sem hyperbolikusnak, sem parabolikusnak nem nevezhetjük.

Most már áttérünk a szferikus geometria formuláinak fölépítésére. SCHILLING[1] a gömbháromszögre vonatkozó HAMILTON-féle tétel alapján állapítja meg a trigonometriai formulákat; KLEIN F.[2] a quadratikus alakok invarians elmélete alapján jelzi a czélhoz vezető utat. Mi is az invarians elmélet tételeit használjuk fel, de a quadratikus alakok mellett a HERMITE-féle alakokat is felhasználjuk.

A szferikus trigonometria formuláit többféle módon lehet meghatározni. Ha csak a quadratikus alakokat használjuk fel, akkor szferikus háromszögnek tekintjük az általuk meghatározott idomot, ha csak a HERMITE-féle alakokra támaszkodunk, akkor tulajdonképen szferikus háromoldallal van dolgunk, ha mind a két fajta alakot egyszerre veszszük kiindulási pontul, akkor az idomot háromszögnek és háromoldalnak tekintjük egyszerre.

A szferikus trigonometria formuláit elegendő a közönséges

---

[1] Az előbb említett értekezésben.

[2] Az előbb említett előadásban.

gömbháromszögre megállapitani, mert kimutatjuk azután, hogy e formulák általános érvényűek.

Legyen tehát adva először három diametrális quadratikus alak:

$$f_k = a_k\eta_1^2 + b_k\eta_1\eta_2 + c_k\eta_2^2, \quad k=1, 2, 3, \tag{26}$$

$$c_k = -\bar{a}_k, \quad b_k = 1 - a_k\bar{a}_k. \tag{27}$$

A közös normálisok az (5) alapján:

$$F_k = 2C_k\eta_1^2 - 4B_k\eta_1\eta_2 + 2A_k\eta_2^2. \tag{28}$$

A háromszög oldalait jelöljük Θ_1, Θ_2, Θ_3-mal, a szögeket: ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3-mal. Akkor az I. fejezet (5) egyenlete alapján:

$$\cos\Theta_k = \frac{d_{lm}}{\sqrt{d_{ll}}\sqrt{d_{mm}}}, \quad \sin\Theta_k = \frac{\frac{i}{2}\sqrt{D_{kk}}}{\sqrt{d_{ll}}\sqrt{d_{mm}}}. \tag{29}$$

Mivel a polárháromszög oldalai egyenlők az eredeti háromszög szögeivel, következik, hogy

$$\cos\vartheta_k = \frac{D_{lm}}{\sqrt{D_{ll}}\sqrt{D_{mm}}}, \quad \sin\vartheta_k = d\cdot\frac{\frac{i}{2}\sqrt{d_{kk}}}{\sqrt{D_{ll}}\sqrt{D_{mm}}}. \tag{30}$$

Itt:

$$d = 16\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{31}$$

és

$$D_{lm}^2 - D_{ll}D_{mm} = \frac{d^2}{4}d_{kk}. \tag{32}$$

A (29) első képletében a $\sqrt{d_{ll}}$ előjele tetszőlegesen választható, akkor a $\sqrt{D_{kk}}$ előjele meg van már határozva, mert

$$D_{kk} = 4\,(d_{lm}^2 - d_{ll}d_{mm}).$$

A (26) alakok tehát egy Möbius-féle háromszöget határoznak meg.

A (29) és (30)-ból következik, hogy

$$\frac{\sin\Theta_1}{\sin\vartheta_1} = \frac{\sin\Theta_2}{\sin\vartheta_2} = \frac{\sin\Theta_3}{\sin\vartheta_3} = \frac{1}{d}\,\frac{\sqrt{D_{11}}\sqrt{D_{22}}\sqrt{D_{33}}}{\sqrt{d_{11}}\sqrt{d_{22}}\sqrt{d_{33}}}. \tag{33}$$

Ez a gömbháromszög szinusz tétele.

A koszinusz tétel leszármaztatható a:

$$D_{lm} = 4(d_{kk}d_{lm} - d_{kl}d_{km}) \tag{34}$$

összefüggésből, ha az invariansok helyébe a (29), (30) segítségével a szögfüggvényeket vezetjük be:

$$\cos\Theta_k = \cos\Theta_l \cos\Theta_m - \sin\Theta_l \sin\Theta_m \cos\vartheta_k. \tag{35}$$

Induljunk ki most három diametrális HERMITE-féle alakból:

$$\varphi_k = \alpha_k\eta_1\bar\eta_1 + \beta_k\eta_1\bar\eta_2 + \bar\beta_k\bar\eta_1\eta_2 + \gamma_k\eta_2\bar\eta_2, \quad k=1,2,3 \tag{36}$$

$$\alpha_k + \gamma_k = 0. \tag{37}$$

A polártriéder oldalai a (10) szerint:

$$\Phi_k = -B'_k\eta_1\bar\eta_1 - 2\Gamma_k\eta_1\eta_2 + 2A_k\bar\eta_1\eta_2 + B'_k\eta_2\bar\eta_2. \tag{38}$$

Ezekből következik, hogy [II. fejezet (4), (5)]:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta_k &= \frac{\delta_{lm}}{\sqrt{\delta_{ll}}\sqrt{\delta_{mm}}}, & \sin\vartheta_k &= \frac{i\sqrt{\Delta_{kk}}}{\sqrt{\delta_{ll}}\sqrt{\delta_{mm}}}, \\ \cos\Theta_k &= \frac{\Delta_{lm}}{\sqrt{\Delta_{ll}}\sqrt{\Delta_{mm}}}, & \sin\Theta_k &= \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta_{kk}}}{\sqrt{\Delta_{ll}}\sqrt{\Delta_{mm}}}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

hol:

$$\begin{aligned} \Delta_{kk} &= \delta_{lm}^2 - \delta_{ll}\delta_{mm}, \\ \Delta_{lm} &= \delta_{kk}\delta_{lm} - \delta_{kl}\delta_{km}, \\ \delta &= |\delta_{kl}|. \quad k,l=1,2,3 \end{aligned} \tag{40}$$

A (39)-ből kapjuk a szinusztételt, ha a megfelelő hányadosokat képezzük:

$$\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\Theta_1} = \frac{\sin\vartheta_2}{\sin\Theta_2} = \frac{\sin\vartheta_3}{\sin\Theta_3} = \frac{i}{\sqrt{\delta}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta_{11}}\sqrt{\Delta_{22}}\sqrt{\Delta_{33}}}{\sqrt{\delta_{11}}\sqrt{\delta_{22}}\sqrt{\delta_{33}}}. \tag{41}$$

A (40) alatt lévő második egyenletből kapjuk a szögekre vonatkozó koszinusztételt:

$$\cos\vartheta_k = \cos\vartheta_l \cos\vartheta_m - \sin\vartheta_k \sin\vartheta_m \cos\Theta_k. \tag{42}$$

Ha a (36) a (26) átmérők által meghatározott legnagyobb körök, vagyis ha a (36) a (3) alatt lévő alakok, akkor

$$4\delta_{ik} = -D_{ik} \tag{43}$$

és így a (29), (30) és (40) alatt lévő megfelelő képletek megegyeznek s ebből éppen bebizonyítottuk, hogy az eredeti háromszög szögei egyenlők a polárháromszög oldalaival. Ebben az esetben tehát nem is kellett a polárháromszöget tekintetbe vennünk az oldalak és szögek meghatározásánál, mert ekkor a (26)-ból felírhatjuk az oldalak függvényeit és a (43) alapján a szögek függvényeit tekintettel arra, hogy a (36) a (3)-mal megegyezik.

Ezekből tehát azt látjuk, hogy ha a quadratikus adatokból vagy csak a HERMITE-féle alakokból indulunk ki, akkor a trigonometria alapképleteit csak abban az esetben vezethettük le, hogy tekintetbe vettük azon tételt, mely szerint a MÖBIUSZ-féle háromszögben a polárháromszög oldalai egyenlők az eredeti háromszög szögeivel s fordítva; de ha a háromszög oldalainak és szögpontjainak megfelelő alakokat egyszerre veszszük tekintetbe, akkor a polárháromszög ezen tulajdonságára nem volt szükségünk, sőt ezen tételt a (43) alapján éppen bebizonyíthattuk.

Továbbá azt is látjuk, a mint az már az V. fejezetből is kitünt, hogy a quadratikus és HERMITE-féle alakok duális viszonyban vannak egymással.

Mielőtt a gömbháromszög többi formuláit meghatároznók, kimutatjuk, hogy a szinusz és koszinusz tétel az egyedüli egymástól független relácziók és pedig a (33)-hoz, illetőleg (41)-hez tartozhatik vagy a (35) vagy a (42). Ugyanis a MÖBIUSZ-féle háromszögek csak akkor tekintendők azonosoknak, ha oldalaik és szögeik mod. 2π kongruensek, tehát elegendő olyan relácziókra bebizonyítani e tételt, melyben az egész oldalak és egész szögek szinuszai és koszinuszai előfordulnak. Ebből a szempontból minden trigonometriai reláczió ilyen alakú:

$$F(\sin\Theta_k \cos\Theta_k \sin\vartheta_l \cos\vartheta_l) = 0, \tag{44}$$

hol az F függvény algebrai összefüggést jelent. Ha a (44)-ből például a (33) és (35) segítségével a szögek függvényeit kiküszöböljük, akkor a (44)-ben csak az oldalak függvényei maradnak s ezeket is a $\sin^2\theta_k + \cos^2\theta_k = 1$ alapján a szinusz függvényekre vezethetjük vissza; tehát a (44) ilyen alakú lesz:

$$F'(\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3) = 0. \tag{45}$$

Ha ez nem volna identitás, akkor az oldalak nem volnának függetlenek, azt pedig tudjuk, hogy egy gömbháromszöget két oldallal meghatározni általában nem lehet. Tehát a (45)-nek identitásnak kell lennie. Ugyanezt mutathattuk volna ki a szögekre a (41) és (42)-vel. Ennélfogva több független reláczió nincs, csak a (33) és (35) vagy (33) és (42).

Klein F.[1] azt is kimutatta, hogy ha a trigonometriai formulák diametrális alakokra érvényesek, akkor tetszőleges alakokra is helyesek.

Ugyanis ő e tétel bizonyításánál azon függvénytani tételt használta föl, mely szerint, ha egy algebrai függvény változóinak összes valós értékei mellett eltűnik, akkor eltűnik e változók összes komplex értékei mellett is. A (44) reláczió például a (26) együtthatóinak csak a viszonyától függ, tehát a (44) így is írható:

$$F''(a_1 : b_1 : c_1, \ a_2 : b_2 : c_2, \ a_3 : b_3 : c_3) = 0. \tag{46}$$

De diametrális alakok esetében

$$a_k = p_k + q_k i, \quad b_k = 1 - p_k^2 - q_k^2, \quad c_k = -p_k + q_k i. \tag{47}$$

A formulák érvényesek a közönséges gömbháromszögtanban, tehát a (46) így írható:

$$F'''(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3) = 0, \tag{47}$$

hol p_k, q_k valós változók.

Ha q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 fix valós mennyiségek, akkor a (47) el-

---

[1] Az előbb említett előadás 324. oldal.

tűnik a p_1 minden valós értéke mellett, tehát a valós tengely mentén s így el kell tűnnie az egész sikon, tehát p_1 felveheti az összes komplex értékeket. Hasonlóképen a q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 is. De ha p_k, q_k tetszőleges komplex mennyiségek, akkor a (26) a legáltalánosabb quadratikus alakokat jelenti s mivel a (33) és (35) nem is vettük figyelembe a (26) speicziális voltát következik, hogy ezek általánosságban is érvényesek s így az összes formulák, melyek ezekből leszármaztathatók komplex szögekre és oldalakra is érvényesek.

A gömbháromszögtan többi formuláit az invariansok közti összefüggésből vezetjük le.

A (26) és (36) alakok invariansai közötti összefüggések még a következők:

$$d_{k1}D_{l1}+d_{k2}D_{l2}+d_{k3}D_{l3}=0, \quad k\neq l \tag{48}$$

$$\delta_{k1}\Delta_{l1}+\delta_{k2}\Delta_{l2}+\delta_{k3}\Delta_{l3}=0. \quad k\neq l \tag{49}$$

A (48) és (49) a (29), (30) és (39) tekintetbe vételével ezen összefüggésekre vezet:

$$\begin{aligned}\sin\Theta_k\cos\Theta_m+\sin\Theta_l\cos\vartheta_m+\sin\Theta_m\cos\Theta_k\cos\vartheta_l=0,\\ \sin\vartheta_k\cos\vartheta_m+\sin\vartheta_l\cos\vartheta_m+\sin\vartheta_m\cos\vartheta_k\cos\vartheta_l=0.\end{aligned} \tag{50}$$

A recziprok determinánsok elméletéből folynak a következő tételek:

$$D_{kk}D_{lm}-D_{kl}D_{km}=+\frac{d^2}{4}d_{lm}, \tag{51}$$

$$\Delta_{kk}\Delta_{lm}-\Delta_{kl}\Delta_{km}=-\delta\,.\,\delta_{lm}. \tag{52}$$

Ezekből kapjuk a:

$$\begin{aligned}\cos\vartheta_k=\cos\vartheta_l\cos\vartheta_m-\sin\vartheta_l\sin\vartheta_m\cos\Theta_k,\\ \cos\Theta_k=\cos\Theta_l\cos\Theta_m-\sin\Theta_l\sin\Theta_m\cos\vartheta_k\end{aligned} \tag{53}$$

tételeket. Ezzel párhuzamosan megállapitottuk mindkét esetre a gömbháromszögtan tételeit.

Ha a (36) a (3)-at jelenti, akkor a (43) alapján a (49) a (48)-ból és az (52) az (51)-ből következik.

Fordítva is járhatunk el. Ha a (36)-ból indulunk ki és a (26) a (9)-et jelenti, akkor a

$$d_{kl} = \tfrac{1}{4} \Delta_{kl} \tag{54}$$

egyenlőségből a (48) és (51) levezethető a (49)-ből és (52)-ből.

Ha:

$$\begin{aligned} 2\pi-(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3) &= 2\Theta, \\ 2\pi-(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3) &= 2\vartheta, \end{aligned} \tag{55}$$

akkor az eddigi képletekből következnek ezek:

$$\sin\frac{\vartheta_k}{2} = \sqrt{\frac{\sin\Theta\sin(\Theta-\Theta_k)}{\sin\Theta_l\sin\Theta_m}};$$

$$\cos\frac{\vartheta_k}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\Theta-\Theta_l)\sin(\Theta-\Theta_m)}{\sin\Theta_l\sin\Theta_m}};$$

$$\sin\frac{\Theta_k}{2} = \sqrt{\frac{\sin\vartheta\sin(\vartheta-\vartheta_k)}{\sin\vartheta_l\sin\vartheta_m}};$$

$$\cos\frac{\Theta_k}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\vartheta-\vartheta_l)\sin(\vartheta-\vartheta_m)}{\sin\vartheta_l\sin\vartheta_m}}.$$

Ezekből megállapítható, hogy

$$\begin{aligned} \sin^2\Theta &= \frac{\sin^2\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\sin^2\Theta_3}{16\cos^2\frac{\vartheta_1}{2}\cos^2\frac{\vartheta_2}{2}\cos^2\frac{\vartheta_3}{2}} = \frac{|D_{ik}|}{2D_1D_2D_3}, \\ \sin^2\vartheta &= \frac{\sin^2\Theta_1\sin^2\Theta_2\sin^2\vartheta_3}{16\cos^2\frac{\Theta_1}{2}\cos^2\frac{\Theta_2}{2}\cos^2\frac{\Theta_3}{2}} = \frac{|d_{ik}|}{2d_1d_2d_3}, \end{aligned} \tag{56}$$

hol:

$$\begin{aligned} D_k &= \sqrt{D_{ll}}\sqrt{D_{mm}} + D_{lm}, \\ d_k &= \sqrt{d_{ll}}\sqrt{d_{mm}} + d_{lm}. \end{aligned} \tag{57}$$

Ha nem a (26)-ból indulunk ki, hanem a (36)-ból, akkor az (54) alapján az (56) és (57) kifejezhető a $|\delta_{kl}|$ és $|\Delta_{kl}|$ segitségével.

Mivel a (26) és (36) alakok speciális voltát nem használtuk fel az eddigi képletek levezetésénél, következik, hogy ezek általános érvényyűek. Ha a (26) és (27) akár a gömbön belül, akár a gömbön kívül fekvő P_0 ponton keresztülmenő egyeneseket és síkokat jelentenek, akkor az eddigi összes tételek érvényesek, ha pedig a (26) három kitérő egyenest jelent, akkor csakis az ebből az alakrendszerből kifolyó tételek helyesek; a (36)-nak ekkor nincs értelme. Az előbbi tárgyalások alapján a (36)-nak megfelelő másodrendű HERMITE-féle alakok helyébe a belőlük meghatározható (IV. fejezet) (28) közös normálisok lépnek, tehát ebben az esetben csakis a (26) és (28)-ból leszármaztatott összefüggések érvényesek, más szóval a háromoldalra vonatkozó tárgyalások a háromszögre vezetendők vissza.

Most a háromszögre vonatkozó néhány nevezetesebb quadratikus és HERMITE-féle alakot határozunk meg.

Kiindulunk ismét a (26)-ból, de felteszszük, hogy a három megfelelő egyenes általános helyzetű legyen. Keressük a (26 alatt megadott szferikus háromszög magassági vonalainak talppontjait meghatározó alakokat. Keressük tehát azon $f_1'=l_2f_2+$ $+l_3f_3$ alakot, melynek megfelelő egyenes az f_1 egyenesen keresztülmenő magassági körnek és az f_2f_3 egyenesek által meghatározott körnek metszéspontjait köti össze. Kör alatt itt mindig a megfelelő quadratikus alakok által meghatározott HERMITE-féle alakokat kell érteni, melyek az általános esetben másodrendűek is lehetnek. Az $l_2:l_3$ meghatározásának feltétele tehát az, hogy az f_1 és f_1', továbbá az f_2 és f_1' közös normálisai merőlegesek legyenek. Az f_2 és f_1' közös normálisa F_1; az f_1 és f_1' közös normálisa: $l_2F_3-l_3F_2$. A hajlásszög koszinusza, kell hogy zérus legyen, tehát:

$$l_2D_{13}-l_3D_{12}=0.$$

Az f_1' tehát ilyen alakú:

$$\begin{aligned} f_1' &= D_{12}f_2+D_{13}f_3, \\ f_2' &= D_{23}f_3+D_{21}f_1, \\ f_3' &= D_{31}f_1+D_{32}f_2. \end{aligned} \tag{58}$$

Ha (36)-ból indulunk ki, akkor a magassági síkok, illetve körök:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= \delta_{13}\varphi_2-\delta_{12}\varphi_3,\\ \varphi_2' &= \delta_{21}\varphi_3-\delta_{23}\varphi_1,\\ \varphi_3' &= \delta_{32}\varphi_1-\delta_{31}\varphi_2.\end{aligned} \tag{59}$$

Ez utóbbi síkok egy egyenesben metszik egymást, mert determinánsaik zérusok.

Ez az egyenes az (54)-ből meghatározható a következő egyenletek alapján:

$$f' = \lambda_1 f_1+\lambda_1' f_1' = \lambda_2 f_2+\lambda_2' f_2' = \lambda_3 f_3+\lambda_3' f_3'.$$

Tehát:

$$f' = \frac{f_1}{D_{23}}+\frac{f_2}{D_{31}}+\frac{f_3}{D_{12}}. \tag{60}$$

Az f_k és f_k' hajlásszögét magasságnak nevezzük és θ_k'-vel jelöljük, akkor az (54) és (26)-ból kapjuk, hogy:

$$\sin^2\theta_k \sin^2\theta_k' = \frac{|d_{kl}|}{d_{11}d_{22}d_{33}}. \quad \begin{matrix} k=1,2,3\\ l=1,2,3\end{matrix} \tag{61}$$

Tehát a magasság és hozzátartozó alapszög szinuszainak szorzata ugyanazon háromszögre állandó.

Az oldalakat felező pontokhoz tartozó quadratikus alakokat következőképen határozzuk meg. Az egyik ilyen alak legyen: $i_1''=l_2f_2+l_3f_3$, akkor

$$\frac{l_2d_{22}+l_3d_{23}}{\sqrt{d_{22}}} = \frac{l_2d_{23}+l_3d_{33}}{\sqrt{d_{33}}}.$$

Ebből következik, hogy:

$$\begin{aligned}f_1'' &= \sqrt{d_{33}}f_2+\sqrt{d_{22}}f_3,\\ f_2'' &= \sqrt{d_{11}}f_3+\sqrt{d_{33}}f_1,\\ f_3'' &= \sqrt{d_{22}}f_1+\sqrt{d_{11}}f_2.\end{aligned}$$

Ha a (36)-ból indulunk ki, akkor az oldalfelező síkok:

$$\begin{aligned}\varphi_1'' &= \sqrt{\Delta_{33}}\varphi_2+\sqrt{\Delta_{22}}\varphi_3,\\ \varphi_2'' &= \sqrt{\Delta_{11}}\varphi_3+\sqrt{\Delta_{33}}\varphi_1,\\ \varphi_3'' &= \sqrt{\Delta_{22}}\varphi_1+\sqrt{\Delta_{11}}\varphi_2.\end{aligned}$$

Ezen körök is egy ponton mennek keresztül a hozzá tartozó quadratikus alak:

$$f'' = \frac{f_1}{\sqrt{d_{11}}} + \frac{f_2}{\sqrt{d_{22}}} + \frac{f_3}{\sqrt{d_{33}}}.$$

A szögfelező egyenesek alakjai:

$$f_1''' = \sqrt{D_{22}}f_2 + \sqrt{D_{33}}f_3,$$
$$f_2''' = \sqrt{D_{33}}f_3 + \sqrt{D_{11}}f_1,$$
$$f_3''' = \sqrt{D_{11}}f_1 + \sqrt{D_{22}}f_2.$$

A szögfelező körök alakjai:

$$\varphi_1''' = \sqrt{\delta_{33}}\varphi_2 + \sqrt{\delta_{22}}\varphi_3,$$
$$\varphi_2''' = \sqrt{\delta_{11}}\varphi_3 + \sqrt{\delta_{33}}\varphi_1,$$
$$\varphi_3''' = \sqrt{\delta_{22}}\varphi_1 + \sqrt{\delta_{11}}\varphi_2.$$

Ezen körök közös metszéspontjához tartozó alak a következő:

$$f''' = \sqrt{D_{11}}f_1 + \sqrt{D_{22}}f_2 + \sqrt{D_{33}}f_3.$$

Ha a négyzetgyököknek részben pozitiv, részben negativ eleket adunk, akkor a külső szögfelezőket kapjuk.

Ezek a nevezetesebb quadratikus és HERMITE-féle alakok, melyek egy háromszögben fellépnek. Most áttérünk a háromszögbe és háromszögköré írható kör sugarának a meghatározására.

Az f_2, f_3, f''' alakok által meghatározott háromszög f'''-hoz tartozó magassága éppen a beírható kör sugara tehát a (61) szerint:

$$\sin^2\theta_1 . \sin^2\rho = \frac{|d_{kl}|'''}{d_{22}d_{33}d'''},$$

hol $|d_{kl}|'''$ azon determinánsot jelenti, mely az $f'''f_2f_3$ alakok invariánsaiból van képezve és d''' az f''' diszkriminánsa

$$|d_{kl}|''' = |d_{kl}| . D_{11},$$

$$d''' = \frac{512\,|d_{kl}|^2 . d_{11}d_{22}d_{33}}{D_1D_2D_3} - 4\,|d_{kl}|.$$

Ezeket tekintetbe véve lesz:

$$\mathrm{tg}^2\rho = -\frac{D_1 D_2 D_3}{128\,|d_{kl}|\,d_{11}d_{22}d_{33}},$$

hol D_k az (57) alatt levő egyenletben meg van adva.

A háromszög köré írható kör szferikus sugarának meghatározásához szükségünk van a kör középpontját kimetsző egyenes alakjára. Ez mindenesetre ilyen alakú:

$$f^{\mathrm{IV}} = l_1 f_1 + l_2 f_2 + l_3 f_3 .$$

A paramétereket meghatározhatjuk azon föltételből, hogy az f^{IV} és f_k hajlásszöge a $k=1, 2, 3$ esetre egyenlő; tehát:

$$l_1 d_{k1} + l_2 d_{k2} + l_3 d_{k3} = \sqrt{d_{kk}}\sqrt{d^{\mathrm{IV}}}\,.\cos r. \tag{62}$$

Ebből következik, hogy:

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{IV}} &= \sqrt{d_{11}}F_1 + \sqrt{d_{22}}F_2 + \sqrt{d_{33}}F_3, \\ d^{\mathrm{IV}} &= 2d'_1 d'_2 d'_3 - |d_{kl}|, \\ d'_k &= d_{lm} - \sqrt{d_{ll}}\sqrt{d_{mm}} \end{aligned}$$

a (62)-ből pedig lesz:

$$\mathrm{cotg}^2 r = \frac{32\,|d_{kl}|\,d_1 d_2 d_3}{D_{11} D_{22} D_{33}}.$$

Természetes, hogy a közönséges gömbháromszögre vonatkozó összes képletek a quadratikus és Hermite-féle alakok segítségével átírhatók és általánosithatók a komplex szögekkel és oldalakkal biró gömbháromszögre. A legáltalánosabb esetben azonban másodrendű Hermite-féle alakok lépnek fel s az ezeknek megfelelő vonalfelületek hajlásszögének meghatározását az alkotók közös normálisaira kellett visszavezetni. Tehát a quadratikus alakokkal az általánosítás nagyobb fokát lehetett elérni, mint az elsőrendű Hermite-féle alakokkal s a másodrendű Hermite-féle alakokkal való operácziót quadratikus alakokra kellett visszavezetni.

VII. Mozgások a szferikus geometriában.

Befejezésül tárgyaljuk még az egyes szferikus geometriai rendszerekben végbemenő mozgásokat. Kiindulunk a diametrális quadratikus és Hermite-féle alakokból, tehát a közönséges szferikus geometriából. Legyenek az I. fejezet (14) és (15) egyenletei diametrálisak, vagyis: $b_k = \bar{b}_k$ és $c_k = -\bar{a}_k$, akkor a (13)' mely a (14)-et a (15)-be viszi, ilyen alakra hozható:

$$\eta' = \frac{\lambda\eta - \mu}{\bar{\mu}\eta + \bar{\lambda}}. \tag{1}$$

Ugyanezen alakra hozható a II. fejezet (8) transzformáczió, mely a Hermite-féle alakokra vonatkozik. Tehát az (1) a közönséges szferikus geometria mozgási egyenlete, a megfelelő kollineáczió invariansul hagyja a gömb középpontját és ennek polársíkját s maga az (1) invariansul hagyja az $\eta\bar{\eta}+1=0$ alakot, vagyis a végtelenben fekvő imaginárius gömbkört.

Ha az I. fejezet (14) és (15) egyenletében az együtthatók valósak, akkor a megfelelő egyenesek az y tengelylyel párhuzamosak s az I. fejezet (13)' transzformáczió ilyen alakra hozható:

$$\eta' = \frac{\lambda\eta + \mu}{\nu\eta + \rho}, \tag{2}$$

hol λ, μ, ν, ρ valós mennyiségek. A (2) az $\eta - \bar{\eta} = 0$ alakot tehát az $y=0$ síkot invariansul hagyja és a megfelelő kol) lineáczió egyszersmind az y tengely végtelenben fekvő pontját is invariansul hagyja. Ugyanezen eredményre jutottunk volna, ha a II. fejezet alapján a Hermite-féle alakokból indultunk volna ki. A (2) tehát a valós együtthatókkal biró quadratikus és Hermite-féle alakokhoz tartozó szferikus geometria mozgási egyenlete.

A P_0 ponton keresztülmenő egyenesek és sikok alakjai az V. fejezet (8) és (10) szerint fejezhetők ki három e ponthoz tartozó alapalakból kiindulva. Ha $l_1 : l_2 : l_3$ az egyik, $m_1 : m_2 : m_3$ a másik egyenest határozza meg, akkor az V. fejezet (8) együtthatóit helyettesítve az I. fejezet (13)' egyenletébe, azt így írhatjuk:

$$\eta' = \frac{(K_{lm}+B_{lm})\,\eta - A_{lm}}{C_{lm}\eta + (K_{lm}-B_{lm})}. \tag{3}$$

Ez a (3) a P_0-hoz tartozó szferikus geometria mozgási egyenlete, hol

$$\frac{l_1}{l_3},\ \frac{l_2}{l_3},\ \frac{m_1}{m_3},\ \frac{m_2}{m_3}$$

a változó paraméterek. Az V. fejezet (10)-ből kiindulva szintén a (3)-hoz hasonló transzformácziót kaptunk volna. A (3) invarians köre az előbbiek szerint a P_0 polársíkjának a gömbbel való metszése. A P_0 vagy a gömbön belül vagy azon kívül fekhetik, ha a gömbön fekszik, akkor a (3) determinánsa eltűnik.

Ha az V. fejezet (24) kongruencziából indulunk ki, akkor is érvényes a (3), de ha a (3)-at a IV. fejezet (6), illetőleg (6)' speczialis másodrendű alakra alkalmazzuk, akkor ez nem megy át egy ugyanazon rendszerbe tartozó alakba, mert a IV. fejezet (6)' meghatározására négynél több egyenlet szükséges. Ennyiben különbözik a IV. fejezet (6)' az elsőrendű Hermite-féle alaktól s ennyiben nem lehet a megfelelő másodrendű vonalfelületet a sík általánosításának tekinteni.

Luckhaub Gyula.

VIZSGÁLATOK AZ ELEMI SZÁMELMÉLET KÖRÉBŐL.

(Második közlemény.)

II.

Az előbbi fejezetben[1] vizsgált egyszerű lineáris helyettesítéssel szoros kapcsolatba hozható egy másik, sokkal bonyolódottabb helyettesítés, a melyet röviden *policziklikus* helyettesítésnek akarunk nevezni, mert e helyettesítés felfogható úgy, mint több, nagyon egyszerű szabály szerint megadott, cziklikus helyettesítés egymásutánja. Legyen ugyanis m tetszőleges pozitiv egész szám; az

$$1, 2, 3, \ldots, x, \ldots, m-1, m$$

főpermutáczióra alkalmazzuk a cziklikus helyettesítést, vagyis képezzük a

$$2, 3, \ldots, x+1, \ldots, m-1, m, 1$$

permutácziót; ebben az első elemet hagyjuk a helyén, és a hátralévő $m-1$ elemet vessük alá a cziklikus helyettesítésnek; majd a keletkező permutáczióban az első két elemet hagyjuk a helyén és a hátralévő $m-2$ elemre alkalmazzuk a cziklikus helyettesítést; és így haladjunk tovább, a míg csak lehet, úgy hogy összesen m számú cziklikus helyettesítést alkalmazunk

[1] L. e Lapok jelen évfolyamának 25. lapját.

fokozatosan 1-gyel kisebbedő elemszámú permutácziókra; az m-edik cziklikus helyettesítés már csak formális jelentőségű, mert ez csupán egy elemre vonatkozik. Tehát azt egyszerűen helyén hagyja. E műveletsorral keletkező

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_x, \dots, v_{m-1}, v_m$$

permutácziót hasonlítsuk össze az eredeti főpermutáczióval és az így keletkező

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \dots, & x, & \dots, & m-1, & m \\ v_1, & v_2, & v_3, & \dots, & v_x, & \dots, & v_{m-1}, & v_m \end{pmatrix} \tag{22}$$

helyettesítés az, a melyet policziklikus helyettesítésnek nevezünk és a melynek törvényszerűségeit fogjuk a következőkben kutatni.[1] Keresni fogjuk elsősorban a helyettesítésnek átviteli törvényét, vagyis igyekezni fogunk a v_x-et előállítani, mint x függvényét; majd vizsgálni fogjuk azt, hogy a policziklikus helyettesítés miképen bomlik fel cziklusokra; ha meghatároztuk az egyes cziklusok elemszámait, akkor ezeknek legkisebb közös többszöröse már megadja a helyettesítés rendszámát. Különös érdekkel bír az irreduczibilitás esete, vagyis az a speciális eset, a melyben a helyettesítés a maga egészében egyetlenegy cziklusból áll, a mikor tehát egyszerűen m adja a helyettesítés rendszámát. Ha megtekintjük a mellékelt táblázatot, melyben az első 25 számra vonatkozólag közöljük az adatokat (l jelenti a helyettesítést alkotó cziklusok számát és $\rho_k (k = 1, \dots, l)$ a k-adik cziklus elemszámát):

---

[1] A policziklikus helyettesítésnek mivolta egyszerűen érzékíthető a következő módon. Veszünk egy kártyacsomót, melynek lapjai természetes sorrendben vannak. A legfelső lapot a csomó alá teszszük, a másodikat az asztalra fektetjük, a harmadikat a csomó alá tesszük, a negyediket az asztalon lévő előbbi kártyára fektetjük és addig folytatjuk ezt az eljárást, a míg minden kártya az asztalra nem kerül. Az ilyen átrendezéssel kapott kártyacsomó lapjainak új sorrendje adja meg a fenti $v_1, \dots, v_x, \dots, v_m$ permutácziót.

m	l	ϱ_k	m	l	ϱ_k
1	1	1	13	3	9, 3, 1
2	1	2	14	1	14
3	2	2, 1	15	6	4, 3, 3, 2, 2, 1
4	2	3, 1	16	4	5, 5, 5, 1
5	1	5	17	5	7, 5, 2, 2, 1
6	1	6	18	1	18
7	4	3, 2, 1, 1	19	4	8, 6, 4, 1
8	2	4, 4	20	2	10, 10
9	1	9	21	3	7, 7, 7
10	5	4, 2, 2, 1, 1	22	7	7, 5, 3, 3, 2, 1, 1
11	2	7, 4	23	2	14, 9
12	2	10, 2	24	4	11, 10, 2, 1
			25	7	6, 5, 4, 4, 3, 2, 1

akkor meglehetős tarka össze-visszaságban mutatkoznak a helyettesítés természetét jellemző számok és valami törvényszerűség megnyilatkozását alig látjuk, a minek oka abban a sajátságos körülményben rejlik, hogy, a mint ki fogjuk mutatni, az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés jellemzőit nem az m-nek, hanem a $2m+1$-nek számelméleti tulajdonságai határozzák meg.

Az x és v_x közti képletösszefüggést, a keresett átviteli törvényt megtaláljuk, ha a policziklikus helyettesítést úgy fogjuk fel, mint több helyettesítésnek egymásutánjából álló sorozatot, a melyben csupán két különböző fajta egyszerűbb helyettesítés fordul elő. Mindenekelőtt lássuk ezt a két egyszerűbb helyettesítést.

Az egyik *(A)* helyettesítés *páros* elemszámú permutáczióra vonatkozik és ha u az elemszám, akkor az első $\frac{u}{2}$ cziklikus helyettesítés olyan egymásutánjából áll, hogy a j-edik cziklikus helyettesítés a megelőző permutáczió utolsó $m-j+1$ elemére alkalmazandó, míg az első $j-1$ elem már változatlanul helyén marad. Ha a főpermutáczióból indulunk ki, akkor ez az *(A)* helyettesítés nyilvánvalóan a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, \frac{u}{2}; & \frac{u}{2}+1, & \frac{u}{2}+2, \ldots, u \\ 2, 4, \ldots, u; & 1, & 3, \ldots, u-1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Ez a helyettesítés röviden úgy jellemezhető, hogy hatására az eredeti permutáczió első felének elemei rendre átmennek a páros rendszámú elemekbe és a második fél elemei rendre átmennek a páratlan rendszámú elemekbe. Ha tehát az

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_u$$

permutáczióra alkalmazzuk az *(A)* helyettesítést és ha az a_k elem átmegy az a'_k-be, akkor

$$a'_k = \begin{cases} a_{2k} \\ a_{2k-u-1} \end{cases}, \quad \text{a mint } k \begin{cases} \leqq \frac{u}{2} \\ > \frac{u}{2} \end{cases}. \tag{23'}$$

A későbbiekre való tekintettel emeljük ki külön azt a speciális esetet, hogy az eredeti permutáczió egymásra következő elemei számtani haladvány szerint nőnek, a melynek különbsége 2 valamelyik hatványa, vagyis hogy

$$a_k = a_1 + (k-1)\,2^{\varepsilon}.$$

Ekkor aztán a (23') képletek a következőkbe mennek át:

$$a'_k = \begin{cases} a_1 + (2k-1)\,2^{\varepsilon} \\ a_1 + (2k-u-2)\,2^{\varepsilon} \end{cases}, \quad \text{a mint } k \begin{cases} \leqq \frac{u}{2} \\ > \frac{u}{2} \end{cases}. \tag{23''}$$

Látnivaló, hogy a keletkező permutácziónak úgy az első, mint a második fele külön-külön számtani haladványt alkot $2^{\varepsilon+}$ különbséggel, melyekben a kezdőelemek

$$a'_1 = a_1 + 2^{\varepsilon} \quad \text{és} \quad a'_{\frac{u}{2}+1} = a_1.$$

A másik *(B)* helyettesítés *páratlan* elemszámú permutáczióra vonatkozik és — u lévén az elemszám — az első

$\frac{u+1}{2}$ cziklikus helyettesítés olyan egymásutánjából áll, hogy a j-edik cziklikus helyettesítés a megelőző permutáczió utolsó $m-j+1$ elemére alkalmazandó, míg az első $j-1$ elem már változatlanul helyén marad. Eredeti permutácziónak a számok természetes sorrendjét vévén, ez a (B) helyettesítés nyilvánvalóan a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, \frac{u-1}{2}; & \frac{u+1}{2}; & \frac{u+3}{2}, \ldots, u \\ 2, 4, \ldots, u-1; & 1; & 3, \ldots, u \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Ezen helyettesítés röviden úgy jellemezhető, hogy hatására a középső elem a legelső elembe megy át, az azt megelőzők rendre a páros rendszámú elemekbe és az azt követők a harmadik elemmel kezdődőleg a páratlan rendszámú elemekbe mennek át. Ha tehát az

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_u$$

permutáczióra alkalmazzuk a második fajta helyettesítést és ha az a_k elem átmegy az a'_k-be, akkor

$$a'_k = \begin{cases} a_{2k} \\ a_1 \\ a_{2k-u} \end{cases}, \quad \text{a mint } k \lesseqgtr \frac{u+1}{2}. \tag{24'}$$

Abban a specziális esetben, mikor az eredeti permutáczió egymásra következő elemei számtani haladvány szerint nőnek, a melynek különbsége 2 valamelyik hatványa, vagyis mikor

$$a_k = a_1 + (k-1)2^e$$

a (24′) képletek átmennek a következőkbe:

$$a'_k = \begin{cases} a_1 + (2k-1)2^e \\ a_1 \\ a_1 + (2k-u-1-)2^e \end{cases}, \quad \text{a mint } k \lesseqgtr \frac{u+1}{2}. \tag{24''}$$

Látnivaló, hogy a keletkező permutáczióban úgy a középső elemet megelőző, mint az azt követő elemek külön-külön számtani haladványt alkotnak 2^{s+1} különbséggel, melyekben a kezdő elemek

$$a'_1 = a_1 + 2^s \quad \text{és} \quad a'_{\frac{u+3}{2}} = a_1 + 2^{s+1}.$$

Ezeknek előrebocsátása után vizsgáljuk azt, hogy miképen lehet összeállítani a policziklikus helyettesítést csupa ilyen *(A)* és *(B)* helyettesítés egymásutánjából.

Legyen először is páros szám az m; ekkor okvetlenül írható egy és csakis egyféleképen a következő alakban:

$$m = 2^{e_z} + 2^{e_{z-1}} + \cdots + 2^{e_i} + \cdots + 2^{e_2} + 2^{e_1}, \tag{25}$$

a hol $e_z, e_{z-1}, \ldots, e_i, \ldots, e_2, e_1$ csökkenő pozitiv egész számok. Legyen továbbá

$$\begin{aligned} m &= 2^{e_1}\vartheta_1, \quad \text{a hol} \quad \vartheta_1 = 2^{e_z - e_1} + \cdots + 2^{e_2 - e_1} + 1, \\ \vartheta_{i-1} - 1 &= 2^{e_i - e_{i-1}}\vartheta_i, \quad \text{a hol} \quad \vartheta_i = 2^{e_z - e_i} + \cdots + 2^{e_{i+1} - e_i} + 1, \\ & \qquad (i = 2, 3, \ldots, z) \end{aligned} \tag{25'}$$

a mely összefüggéseknél fogva a $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_i, \ldots, \vartheta_{z-1}, \vartheta_z = 1$ csökkenő páratlan számokat jelentenek.

Oszszuk be most a kiindulásul szolgáló

$$1, 2, \ldots, x, \ldots, m-1, m$$

főpermutáczió elemeit balról jobbra haladva szakaszokba a következő utasítás szerint.

Mindenekelőtt határozzunk meg az m szám (25) és (25') felbontásai alapján a főpermutáczió elemei közül z számú kiváltságos szerepű elemet, az úgynevezett *határelemeket* a következő módon. Az i-edik határelemet adja meg a

$$h_i = m - \frac{\vartheta_i - 1}{2} = \frac{(2m+1) - \vartheta_i}{2} \tag{26}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, z)$$

képlet, a mely szerint az utolsó határelem $h_z = m$ lesz. Az első határelemet a főpermutáczióban megelőzi

$$h_1-1=m-\frac{\vartheta_1+1}{2}$$

elem és ezeket oszszuk be balról jobbra haladva a

$$h_1-1=\frac{m}{2}+\frac{m}{2^2}+\cdots+\frac{m}{2^{e_1}}+\frac{\vartheta_1-1}{2}$$

azonosságból látható módon e_1+1 szakaszba.

A h_i és h_{i+1} határelemek közé, a h_i beleértésével és a h_{i+1} kizárásával esik

$$h_{i+1}-h_i=\frac{\vartheta_i-\vartheta_{i+1}}{2}$$

elem és ezeket oszszuk be balról jobbra haladva a

$$h_{i+1}-h_i=1+\frac{\vartheta_i-1}{2}+\frac{\vartheta_i-1}{2^2}+\cdots+\frac{\vartheta_i-1}{2^{e_{i+1}-e_i}}+\frac{\vartheta_{i+1}-1}{2}$$

azonosságnak megfelelően $e_{i+1}-e_i$ szakaszba, mikor is a képlet jobb oldalán álló összegben az 1 azon legközelebbi taghoz számitandó, a mely valóban létezik, a mi annyit mond, hogy a h_i határelem mindig az (e_i+2)-edik szakasz kezdő eleme. Ennélfogva a legutolsó határszám $(h_z=m)$ egymagában alkotja az (e_z+2)-ik szakaszt. Megjegyzendő még, hogy ezen utasításnál fogva az utolsóelőtti, vagyis az (e_z+1)-edik szakasz az $e_z-e_{z-1}\geqq 2$ esetben egyáltalán nem tartalmaz egy elemet sem, míg az $e_z-e_{z-1}=1$ esetben csupán egy elemből, a h_{z-1} határelemből áll.

Nagyobb világosság kedvéért lássunk egy számbeli példát is a szakaszbeosztás tényleges kivitelére.

Legyen

$$m=54=2^5+2^4+2^2+2^1$$

mostan tehát $z=4$, $e_z=5$, úgy hogy összesen négy határelem és hét szakasz fog létezni. Mivel továbbá

$$54=2\,.\,27,\quad 26=2\,.\,13,\quad 12=2^2.\,3,\quad 2=2\,.\,1$$

és így

$$\vartheta_1=27,\quad \vartheta_2=13,\quad \vartheta_3=3,\quad \vartheta_4=1,$$

azért a (26) képlet szerint

$$h_1 = 41,\quad h_2 = 48,\quad h_3 = 53,\quad h_4 = 54$$

lesznek a határelemek. A főpermutáczió elemeinek szakaszokba való osztását a következő táblázat tünteti fel:

Szakasz	Elemszám	Elemek
1	$\frac{m}{2} = \vartheta_1 = 27$	1, 2, ..., 26, 27
2	$\frac{\vartheta_1 - 1}{2} = \vartheta_2 = 13$	28, 29, ..., 39, 40
$3 = e_1 + 2$	$1 + \frac{\vartheta_2 - 1}{2} = 7$	**41**, 42, ..., 46, 47
$4 = e_2 + 2$	$1 + \frac{\vartheta_2 - 1}{4} = 4$	**48**, 49, 50, 51
5	$\frac{\vartheta_3 - 1}{2} = 1$	52
$6 = e_3 + 2$	1	**53**
$7 = e_4 + 2$	1	**54**

Mielőtt továbbhaladnánk tárgyalásainkban, bizonyítsunk be egy a fenti szakaszbeosztásra vonatkozó tételt. A fentiek szerint a főpermutáczió minden egyes x eleme beletartozik egy meghatározott rendszámú szakaszba, jelöljük az x elem szakaszrendszámát s_x-el és képezzük a $\sum\limits_{x=1}^{m} s_x$ összeget; azt állítjuk, hogy

$$\sum_{x=1}^{m} s_x = 2m. \tag{27}$$

Vezessük be átmenetileg a következő rövid jelölést:

$$e_{i+1} - e_i = f_{i+1},\quad e_1 = f_1.$$

Az összeg kiszámításánál foglaljuk össze mindenekelőtt a határelemeknek megfelelő tagokat; ezek szolgáltatni fogják a következő összeget:

$$\sum_{i=1}^{z} s_{h_i} = \sum_{i=1}^{z} (e_i + 2) = \sum_{i=1}^{z} e_i + 2z.$$

Így aztán a szakaszbeosztás szabályánál fogva a kivánt összeg először is a következő alakban írható:

$$\sum_{x=1}^{m} s_x = 1\frac{m}{2} + 2\frac{m}{2^2} + 3\frac{m}{2^3} + \cdots + e_1\frac{m}{2^{f_1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{z-1}\left[(e_i+1)\frac{\vartheta_i-1}{2} + (e_i+2)\frac{\vartheta_i-1}{2^2} + \cdots + (e_i+f_{i+1})\frac{\vartheta_i-1}{2^{f_{i+1}}}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{z} e_i + 2z.$$

Ha azonban még figyelembe veszszük azt, hogy

$$\frac{m}{2^{f_1}} = \vartheta_1, \quad \frac{\vartheta_i-1}{2^{f_{i+1}}} = \vartheta_{i+1}, \quad \vartheta_z = 1,$$

akkor a következő alakot nyerjük:

$$\sum_{x=1}^{m} s_x = \sum_{i=0}^{z-1} \vartheta_{i+1}\left[2^{f_{i+1}-1} + 2\,.\,2^{f_{i+1}-2} + 3\,.\,2^{f_{i+1}-3} + \cdots + f_{i+1}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1} e_i \left[2^{f_{i+1}-1} + 2^{f_{i+1}-2} + 2^{f_{i+1}-3} + \cdots + 1\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{z} e_i + 2z.$$

Most már az első két sorban álló kétfajta haladvány összegezhető, a mennyiben:

$$2^{f-1} + 2^{f-2} + 2^{f-3} + \cdots + 1 = 2^f - 1,$$

$$2^{f-1} + 2\,.\,2^{f-2} + 3\,.\,2^{f-3} + \cdots + (f-1)\,2 + f = 2\,(2^f-1) - f,$$

úgy hogy

$$\sum_{x=1}^{m} s_x = \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1}\,[2\,(2^{f_{i+1}}-1) - f_{i+1}] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1}\, e_i\,[2^{f_{i+1}} - 1] + \sum_{i=1}^{z} e_i + 2z.$$

Ámde

$$2\sum_{i=0}^{z-1}(\vartheta_{i+1}2^{f_{i+1}} - \vartheta_{i+1}) = 2\,[(m-\vartheta_1) + \sum_{i=1}^{z-1}(\vartheta_i - 1 - \vartheta_{i+1})] = 2m - 2z -$$

$$- \sum_{i=0}^{z-1} \vartheta_{i+1} f_{i+1} + \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1}\, 2^{f_{i+1}}\, e_i - \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1}\, e_i =$$

$$= -\vartheta_1 e_1 - \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1} e_{i+1} + \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1} e_i + \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_i e_i - \sum_{i=1}^{z-1} e_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{z-1} \vartheta_{i+1} e_i = - \sum_{i=1}^{z} e_i,$$

a mely összefüggések tekintetbe vételével valóban az adódik ki, hogy

$$\sum_{x=1}^{m} s_x = 2m.$$

Ezek után keressük végre azt, hogy a policziklikus helyettesítés törvényszerűségeinek vizsgálatánál mi hasznát vehetjük az előrebocsátott két egyszerűbb helyettesítésnek és a főpermutáczió szakaszokra való tagolásának? Alkalmazzuk az m elemet tartalmazó főpermutáczióra az *(A)* helyettesítést, a minek hatására keletkező permutácziónak első fele már teljesen megegyezik a policziklikus helyettesítéssel keletkező végső permutáczió első felével, tehát a megtett első lépés a főpermutáczió első szakaszának elemeit mindjárt a végleges elemekbe vitte át. Ha az első lépéssel nyert permutáczió második felére, mint $u = \frac{m}{2}$ elemszámú permutáczióra alkalmazzuk megint az *(A)* helyettesítést, akkor a keletkező permutáczió első fele már megadja a főpermutáczió második szakaszának megfelelő végső elemeket. Ezután a második félre, mint $u = \frac{m}{4}$ elemszámú permutáczióra alkalmazzuk az *(A)* helyettesítést és igy haladunk tovább, a míg csak lehet, vagyis utoljára az $u = \frac{m}{2^{e_1-1}} = 2\vartheta_1$ elemszámú permutáczióra alkalmazzuk az e_1-edik *(A)* helyettesítést, a mivel olyan permutácziót nyerünk, melynek első felében az e_1-edik szakasz elemeinek megfelelő végleges elemek állanak és második felének elemszáma (ϑ_1) már páratlan. Az (e_1+1)-edik lépés abban áll, hogy erre a ϑ_1 elemszámú permutáczióra alkalmazzuk a *(B)* helyettesítést, a minek következtében a középső elem és az azt megelőző elemek már végleges helyükre jutnak; vagyis az (e_1+1)-edik lépés a főpermutáczió (e_1+1)-edik szakaszának elemeit és az (e_1+2)-edik szakasz kezdőelemét a h_1 határelemet átviszi a policziklikus helyettesítésnél nekik megfelelő végső elemekbe. Ezután az (e_1+1)-edik lépéssel nyert permutáczió középső elemét követő elemekre, mint $\frac{\vartheta_1-1}{2}$ elemszámú permutáczióra alkalmaznunk kell az *(A)*, vagy a *(B)* helyettesitést, a szerint, a mint $\frac{\vartheta_1-1}{2}$ páros vagy páratlan szám. Ezt az eljárást folytatjuk addig, a míg a főpermutáczió összes elemeit ki nem merítettük. Így a policziklikus helyettesités fel van bontva e_z+1 lépés egymásutánjára, a mely lépések mindegyike *(A)* vagy *(B)* helyettesités. És e felbontás haszna abban áll, hogy általában a főpermutáczió s-edik szakaszában fekvő x elemet az első s lépés egymásutánja átviszi a végleges v_x elembe. Kivételt alkotnak e szabály alól a határelemek, a mennyiben az (e_i+2)-edik szakaszban fekvő h_i határelemet már az e_i+1 lépés átviszi a neki megfelelő $v_{h_i}=H^i$ elembe.

Ha az egymást követő lépéseknél, mint *(A)* vagy *(B)* helyettesítéseknél, tekintetbe veszszük az ezeket jellemző átviteli képleteket — (23″) és (24″) — akkor könnyű szerrel megállapithatjuk a policziklikus helyettesítéssel keletkező permutáczióban az elemek egymásra következésének rendjét. Ez a rend a következőképen jellemezhető. A főpermutáczió h_i határelemei átmennek a

$$\begin{aligned}
H_1 &= 1,\\
H_2 &= H_1+2^{e_1+1} = 1+2^{e_1+1},\\
H_3 &= H_2+2^{e_2+1} = 1+2^{e_1+1}+2^{e_2+1},\\
&\vdots\\
H_i &= H_{i-1}+2^{e_{i-1}+1} = 1+2^{e_1+1}+2^{e_2+1}+\dots+2^{e_{i-1}+1},\\
&\vdots\\
H_z &= H_{z-1}+2^{e_{z-1}+1} = 1+2^{e_1+1}+2^{e_2+1}+\dots+2^{e_{z-1}+1}
\end{aligned} \tag{28}$$

elemekbe.

A H_1-et megelőzőleg van tudvalevőleg e_1+1 szakasz, a melyek közül az r-ediknek elemei számtani haladvány szerint nőnek, a melynek kezdőeleme: $H_1+2^{r-1}=1+2^{r-1}$ és különbsége 2^r. A H_i és H_{i+1} szomszédos két határelem közé esik $e_{i+1}-e_i$ szakasz, a melyek közül az első szakaszban a kezdőelem H_i és a rákövetkező elem $H_{i+1}+2^{e_i+1}$, a második szakasz kezdőeleme $H_{i+1}+2^{e_i+2}$, a t-edik szakasz kezdőeleme $H_{i+1}+2^{e_i+t}$, végre az utolsó szakasz kezdőeleme $H_{i+1}+2^{e_{i+1}}$; mindenik szakasz elemei számtani haladványt alkotnak, még pedig a t-ediknek különbsége 2^{e_i+t+1}, úgy hogy a legelejéről számított r-edik szakasznak különbsége megint 2^r. A legutolsó határszám, a H_z maga alkotja a legutolsó, az (e_z+2)-ik szakaszt. A kimondott szabályszerűség érvényes a H_i határelemet tartalmazó szakaszra is, mert a (28) képletek szerint

$$H_{i+1}+2^{e_i+1}-H_i=2^{e_i+1}+2^{e_i+1}=2^{e_i+2}.$$

Mutassuk meg egy számbeli példán, hogy a fentiek alapján mily rendkívül egyszerűen lehet a végső permutácziót a maga egészében egyszerre felírni.

Legyen megint

$$n=54=2^5+2^4+2^2+2^1.$$

A végső permutáczió négy határeleme a (28) képletekből lesz:

$$H_1=1,\quad H_2=1+2^{1+1}=5,\quad H_3=5+2^{2+1}=13,\quad H_4=13+2^{4+1}=45.$$

A permutáczió felbomlik hét szakaszra, melyekben H_1 a harmadiknak, H_2 a negyediknek, H_3 a hatodiknak és H_4 a hetediknek lesz a kezdőeleme. Az egymást követő szakaszok meg a következők:

$$\begin{array}{ll}
 & 1+2^0=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots,54 \\
 & 1+2^1=3,\ 7,\ 11,\ 15,\ldots,51 \\
H_1=1, & 5+2^2=9,\ 17,\ 25,\ldots,49 \\
H_2=5, & 13+2^3=21,\ 37,\ 53 \\
 & 13+2^4=29 \\
H_3=13. & \\
H_4=45. &
\end{array}$$

A policziklikus helyettesitésnek lépésenkénti végrehajtása segítségével igen egyszerű analitikai alakban fejezhetjük ki az átviteli törvényt. Be fogjuk bizonyítani azt, hogy ha x a főpermutácziónak tetszőleges eleme, a mely az s-edik szakaszban fekszik, akkor a policziklikus helyettesítés végrehajtása után az x helyébe a

$$v_x = 2^s x - (2^{s-1} - 1)(2m+1) \tag{29}$$

képlettől megadott elem kerül.

Először is igazoljuk a képlet helyességét arra az esetre, hogy az x nem határelem. Tegyük tehát fel, hogy az x a főpermutáczió két szomszédos határeleme, h_i és h_{i+1} között fekszik, úgy hogy

$$e_i + 2 \leqq s < e_{i+1} + 2.$$

A legelejéről számított e_i-edik lépés megtételével keletkezett permutáczió második fele ϑ_i számú elemből áll, melyek számtani haladványt alkotnak H_i-vel, mint kezdőelemmel és 2^{e_i} különbséggel. Ezen második félnek, mint önálló permutácziónak általános elemét jelöljük $a_{x_{e_i}}^{(e_i)}$, a mely jelölésben az x_{e_i} index megadja az elemhez a permutáczióban tartozó rendszámot, így aztán a permutáczió a következő lesz:

$$a_1^{(e_i)} = H_i,\ a_2^{(e_i)} = H_i + 2^{e_i}, \ldots, a_{x_{e_i}}^{(e_i)} =$$

$$= H_i + (x_{e_i} - 1)\, 2^{e_i}, \ldots, a_{\vartheta_i}^{(e_i)} = H_i + (\vartheta_i - 1)\, 2^{e_i}. \tag{30}$$

Az x_{e_i} indexű elem a főpermutáczió x rendszámú eleméből keletkezett, a melyik a főpermutáczió utolsó ϑ_i elemének valamelyike, ennélfogva rögtön megállapítható a következő összefüggés:

$$x_{e_i} = x - n + \vartheta_i. \tag{31}$$

Az $(e_i + 1)$-edik lépés abban áll, hogy a (30) permutáczióra alkalmazzuk a *(B)* helyettesítést, a keletkező permutáczió második fele olyan permutáczió, a melynek elemszáma $\frac{\vartheta_i - 1}{2}$, kezdő eleme

$$H_i + 2 \,.\, 2^{e_i} = H_{i+1}$$

különbsége 2^{e_i+1}, általános eleme $a^{(e_i+1)}_{e_i+1}$, a hol

$$x_{e_i+1}+\frac{\vartheta_i-1}{2}+1=x_{e_i}.$$

Tegyük fel, hogy $\frac{\vartheta_i-1}{2}$ páros szám; ekkor a legutolsó permutáczióra az *(A)* helyettesitést kell alkalmazni, a minek megtörténte után a keletkező permutáczió második fele olyan permutáczió, a melynek elemszáma $\frac{\vartheta_i-1}{2^2}$, kezdő eleme H_{i+1}, különbsége 2^{e_i+2}, általános eleme $a^{(e_i+2)}_{x_{e_i+2}}$, a hol

$$x_{e_i+2}+\frac{\vartheta_i-1}{2^2}=x_{e_i+1}.$$

Feküdjék az x elem a főpermutáczió e_i+t+1-edik szakaszában, ekkor el kell még végeznünk az (e_i+3)-adik, (e_i+4)-edik és így tovább, végre az (e_i+t)-edik lépést, a mik a feltevés szerint csupa *(A)* helyettesítések. A keletkező permutáczió második fele olyan permutáczió, melynek elemszáma $\frac{\vartheta_i-1}{2^t}$, kezdő eleme H_{i+1}, különbsége 2^{e_i+t}, általános eleme:

$$a^{(e_i+t)}_{x_{e_i+t}}=H_{i+1}+(x_{e_i+t}-1)\,2^{e_i+t}, \tag{32}$$

a hol

$$x_{e_i+t}+\frac{\vartheta_i-1}{2^t}=x_{e_i+t-1}.$$

Az indexértékek közti összefüggést megadó egyenleteket összegezve kapjuk a következő egyenletet:

$$x_{e_i+t}+(\vartheta_i-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^t}\right)+1=x_{e_i},$$

a honnan

$$x_{e_i+t}=x_{e_i}-\vartheta_i+\frac{\vartheta_i-1}{2^t},$$

vagy végre a (31) egyenlet figyelembe vételével

$$x_{e_i+t}=x-m+\frac{\vartheta_i-1}{2^t}. \tag{33}$$

Az x helyzetére tett feltevésünk szerint a (32) permutáczióra alkalmazandó (e_i+t+1)-edik lépés már megadja az x helyébe kerülő v_x elemet, a mely a keletkező permutáczió első felének valamelyik eleme. Még pedig lehet a (32) permutáczió $m=\frac{\vartheta_i-1}{2^t}$ elemszáma akár páros, akár páratlan, tehát a még megteendő lépés lehet akár *(A)*, akár *(B)* helyettesités, az első félben fekvő v^x-nek képlete a (23″) és (24″) képletek szerint ugyanaz lesz, nevezetesen a következő

$$v_x=H_{i+1}+(2x_{e_i+t}-1)\,.\,2^{e_i+t}.$$

Ha ide behelyettesítjük x_{e_i+t} (33) kifejezését, akkor

$$v_x=H_{i+1}+\left(2x-2m+\frac{\vartheta_i-1}{2^{t-1}}-1\right).\,2^{e_i+t}.$$

Továbbá, tekintettel lévén arra, hogy

$$e_i+t+1=s,$$

$$v_x=2^sx-2^{s-1}(2m+1)+H_{i+1}+(\vartheta_i-1)\,2^{e_i+1}.$$

Ha azonban figyelembe veszszük a H_{i+1}-nek (28) alatti és a ϑ_i-nek (25′) alatti jelentését, akkor azt látjuk, hogy

$$(H_{i+1}-2^{e_i+1})+\vartheta_i 2^{e_{i+1}}=(1+2^{e_1+1}+2^{e_2+1}+\cdots+2^{e_{i-1}+1})+$$

$$+(2^{e_i+1}+\cdots+2^{e_{i+1}+1}+\cdots+2^{e_z+1})=$$

$$=1+2\,[2^{e_z}+2^{e_{z-1}}+\cdots+2^{e_i}+\cdots+2^{e_2}+2^{e_1}]=1+2m.$$

Így aztán csakugyan kiadódik, hogy

$$v_x=2^sx-(2^{s-1}-1)(2m+1).$$

A fenti bizonyítás lényegileg érvényes arra az esetre is, hogy x a legelső határelemnél is kisebb, vagyis, hogy

$$x<h_1,\quad s<e_1+2.$$

Csak ekkor még egyszerűbbek az egyenletek, a mennyiben a fenti képletekben mindenhol az

$$e_i(=)0,\quad \vartheta_i-1\ (=)m,\quad x_{e_i}(=)x,\quad H_{i+1}(=)H_1=1$$

helyettesítések teendők.

Az első szakaszban lévő elemekre vonatkozólag a (29) képlet az $s=1$ helyettesítéssel azt adja, hogy

$$v_x = 2x.$$

Most még csak azt kell megmutatni, hogy a (29) képlet érvényes a határelemekre is. A h_i határelem az (e_i+2)-edik szakasz kezdőeleme, ha tehát a (29) képlet most is helyes, akkor kell, hogy

$$v_{h_i} = 2^{e_i+2}h_i-(2^{e_i+1}-1)(2m+1).$$

Mivel azonban a (26) sserint

$$h_i = \frac{(2m+1)-\vartheta_i}{2},$$

azért

$$v_{h_i} = -2^{e_i+1}\vartheta_i+2m+1=-(2^{e_z+1}+\cdots+2^{e_{i+1}+1}+2^{e_{i+1}})+$$
$$+(2^{e_z+1}+\cdots+2^{e_i+1}+2^{e_{i-1}+1}+\cdots+2^{e_1+1}+1)=$$
$$=1+2^{e_1+1}+2^{e_2+1}+\cdots+2^{e_{i-1}+1}=H_i,$$

a mivel a kivánt igazolás megtörtént.

Ezzel elintéztük azt az esetet, hogy m páros szám és át kell térnünk arra az esetre, hogy m páratlan. Legyen tehát:

$$m = 2^{e_z}+2^{e_{z-1}}+\cdots+2^{e_3}+2^{e_2}+2^0. \tag{34}$$

A (25) alakkal való összehasonlítás mutatja, hogy a páratlan m felfogható a páros m azon speciális esetének, a melyiknél $e_1=0$ és így — a (25') egyenletekben megállapitott jelöléssel élve — $\vartheta_1=m$. Közvetlenül világos, hogy a páros m-re vonatkozó fenti vizsgálatok és eredmények változatlanul érvényesek maradnak páratlan m-re is, ha csak bennök az $e_1=0$, $\vartheta_1=m$ helyettesítéseket teszszük meg, miért is ezzel az esettel részletesebben foglalkozni fölösleges és teljesen elégséges annak a kiemelése, hogy a (27) és (29) alapvető összefüggések páratlan m esetében is megtartják érvényességüket.

A fenti vizsgálatok leglényegesebb eredménye az, hogy egészen tetszőleges m mellett egységes analitikai összefüggést találtunk a főpermutáczió bármelyik x eleme és a policziklikus helyettesítéssel helyébe kerülő v^x elem között, a mely (29) összefüggésben az s kitevő szakaszonként változó pozitiv egész számot jelent, melynek legkisebb értéke 1 és legnagyobb értéke e_z+2. Az átviteli törvényt kifejező (29) képlet levezetésénél lényeges szerepet játszott a főpermutáczió elemeinek szakaszokba való osztása és e szakaszoknak rendszáma, mert ezen a módon volt meghatározható az s kitevőnek bizonyos x-hez tartozó értéke. A levezetésben magától értetődő volt, hogy a (29) képlet jobboldala, helyesen választván meg az m-nél nem nagyobb pozitiv x-hez tartozó s-et, ugyancsak az m-nél nem nagyobb pozitiv számot eredményez. Most azonban utólag függetleníthetjük magunkat a (29) képlet értelmezésénél a főpermutáczió szakaszbeosztásától, a mennyiben azt mondhatjuk, hogy adott x esetében az az s kitevő veendő, a melyik mellett a képlet jobboldala m-nél nem nagyobb pozitiv számot ád. Ehhez azonban szükséges annak a kimutatása, hogy ilyen s kitevő mindig egy és csakis egy létezik. Ez azonban igen egyszerűen sikerül. Hozzuk be átmenetileg az

$$m-x=y$$

jelölést és írjuk a (29) képletet a következő alakban:

$$v_x=(2m+1)-2^{s-1}(2y+1), \tag{29'}$$

a hol y az m-nél kisebb pozitiv egész szám vagy zérus. A képlet (29') alakja világosan mutatja azt, hogy $s=1$ mellett $v_x>0$ és hogy s növekedtével a v_x csökken. Ennélfogva az s kitevő fokozatos növelésénél okvetlen találunk egy olyan értéket, a mely mellett a (29') jobboldala utóljára lesz m-nél nagyobb; ennek megfelelőleg legyen

$$2^{s-1}(2y+1)=A,$$

úgy hogy a feltevés szerint

$$2m+1-A>m,$$

de már 1-gyel növelve az előző kitevőt

$$2m+1-2A\leqq m$$

és mivel az előbbi egyenlőtlenségből $A\leqq m$, azért

$$2m+1-2A>0.$$

Tehát a legutóbbi kitevő valóban olyan, a mely a (29') jobboldalát m-nél nem nagyobb pozitiv számmá teszi. De egyúttal ez az egyedüli ilyen kitevő, mert ha ezt megint 1-gyel nagyobbítjuk, akkor a (29') jobboldala már negativ számot ád, a mennyiben

$$2m+1-4A<0,$$

mert a második egyenlőtlenség szerint

$$2A\geqq m+1,$$

a mivel a fenti állitásunk valóban igaznak bizonyult.

Ha a (29) képlet segélyével meghatározzuk az $x=x_1$ elemre következő $v_{x_1}=x_2$ elemet, majd az $x=x_2$ elemre következő $v_{x_2}=x_3$ elemet és így haladunk tovább, akkor okvetlen bevégződik valamikor ez az eljárás azzal, hogy a $v_{x_{\varrho-1}}=x_\varrho$ elemre a kiindulásul szolgáló x_1 elem következik; ezzel meghatároztuk a policziklikus helyettesítésnek egy

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{\varrho-1}, x_\varrho)$$

ciklusát, melynek elemszáma: $\rho\leqq m$. Ha az x_i elemnek a főpermutáczióra vonatkozó szakasz-rendszámát s_i-vel jelöljük, akkor a (29) képlet szerint fennállnak a következő egyenletek:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 2^{s_1}x_1-(2^{s_1-1}-1)(2m+1),\\
x_3 &= 2^{s_2}x_2-(2^{s_2-1}-1)(2m+1),\\
&\vdots\\
x_i &= 2^{s_{i-1}}x_{i-1}-(2^{s_{i-1}-1}-1)(2m+1),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$x_\varrho = 2^{s_{\varrho-1}} x_{\varrho-1} - (2^{s_{\varrho-1}-1} - 1)(2m+1),$$

$$x_1 = 2^{s_\varrho} x_\varrho - (2^{s_\varrho - 1} - 1)(2m+1).$$

Ha már most az x_2 kifejezését beteszszük a második egyenletbe, az x_3-nak így nyert kifejezését a harmadik egyenletbe és így tovább, végre az x_ϱ kifejezését behelyettesítjük az utolsó egyenletbe, akkor megfelelő összevonások után x_1 számára a következő képletet kapjuk:

$$x_1 = (2m+1) \frac{2^{s_1+s_2+\cdots+s_\varrho-1} - (2^{s_2+\cdots+s_\varrho-1} + 2^{s_3+\cdots+s_\varrho-1} + \cdots + 2^{s_\varrho-1} + 1)}{2^{s_1+s_2+\cdots+s_\varrho}-1} \tag{35}$$

Ha a cziklusnak x_i elemét vennők kezdőelem gyanánt, akkor természetesen egészen hasonló képletet nyernénk x_i számára, úgy hogy a (35) képlet rendre megadja a cziklusba tartozó többi elemet is, ha csak benne az $1, 2, \ldots, i, \ldots \rho$ indexeket rendre ciklikusan felcseréljük.

Mielőtt elvi következtetést vonnánk le a (29) és (35) képletekből, jegyezzük meg azt, hogy a policziklikus helyettesítés cziklusainak tényleges meghatározása adott m esetében meglehetős nehézkesen megy a (29) képlet közvetlen alkalmazásával. De könnyen hozható e képlet olyan alakra, a mely különösen alkalmas a cziklusok megállapítására. E végből kérdezzük azt, hogy a végső permutáczió valamelyik v_x eleme a főpermutáczió melyik x elemének helyébe került, vagyis más szóval, hogy az adott $v_x = x_i$ elemet a cziklusában melyik $x = x_{i-1}$ elem előzi meg? A (29) képlet szerint kell, hogy

$$x_i = 2^s x_{i-1} - (2^{s-1} - 1)(2m+1),$$

vagyis az egyenletet x_{i-1} szerint megoldva:

$$x_{i-1} = \frac{2^{s-1}(2m+1) - [(2m+1) - x_i]}{2^s}.$$

Legyen itten

$$\Delta_i \equiv (2m+1)-x_i = 2^{\varepsilon_i}\theta_i,$$

a hol θ_i páratlan szám; ekkor aztán

$$x_{i-1} = \frac{2^{s-1}(2m+1)-2^{\varepsilon_i}\theta_i}{2^s}.$$

Itt az x_{i-1} csakis úgy lehet egész szám, hogy

$$s-1=\varepsilon_i, \quad s=\varepsilon_i+1$$

és így

$$x_{i-1} = \frac{(2m+1)-\theta_i}{2} = m - \frac{\theta_i-1}{2}. \qquad (29'')$$

Ha nevezetesen x_i páros szám, akkor $\varepsilon_i=0$ és a (29″) képlet átmegy a következőbe:

$$x_{i-1} = \frac{x_i}{2}.$$

Ha a fenti képletekben $x_i = x_1$, akkor $x_{i-1} = x_\varrho$, mert a cziklus kezdőelemét megelőzi a cziklus utolsó eleme. Most már a (29″) képlet segítségével nagyon egyszerűen lehet adott számbeli m mellett a policziklikus helyettesités összes cziklusait meghatározni. Legelőször is megkeressük az 1-gyel kezdődő cziklus végső elemét, azután az ezt megelőzőt és így haladunk visszafelé, a míg megint az 1-hez nem jutunk. Ezután kezdőelem gyanánt veszszük az első cziklusban elő nem fordult legkisebb páratlan számot és meghatározzuk ennek a cziklusát; és az eljárást addig folytatjuk, a míg ki nem merítettük az összes elemeket.

Lássuk az eljárás tényleges kivitelét egy számbeli példán. Legyen

$$m=11, \quad 2m+1=23,$$

x_i	Δ_i	x_{i-1}
1	$23-1=22=2.11$	$\frac{23-11}{2}=6$
6		3
3	$23-3=20=2^2.5$	$\frac{23-5}{2}=9$
9	$23-9=14=2.7$	$\frac{23-7}{2}=8$
8		4
4		2
2		1
5	$23-5=18=2.9$	$\frac{23-9}{2}=7$
7	$23-7=16=2^4.1$	$\frac{23-1}{2}=11$
11	$23-11=12=2^2.3$	$\frac{23-3}{2}=10$
10		5

úgy hogy $m=11$-re vonatkozó policziklikus helyettesítés a következő két cziklusra bomlik fel:

$$(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 3,\ 6);\quad (5,\ 10,\ 11,\ 7).$$

Térjünk most vissza a (29) és (35) képletekhez és vonjunk belőlük további következtetéseket a policziklikus helyettesítést illetőleg. A (29) képlet, mint láttuk, adott x-nél csakis egy bizonyos s_x kitevő mellett eredményezhet m-nél nagyobb pozitiv egész számot, a melyik megadja az x helyébe lépő v_x számot; ha azonban a képletet rendre alkalmazzuk a kitevőnek 1-től a bizonyos s_x-ig menő értékeire, akkor a keletkező

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ldots,\ x^{(j)},\ x^{(j+1)},\ldots,\ x^{(s_x)}=v_x$$

számok mindenike pozitiv és $(2m+1)$-nél kisebb és még

$$x^{(j+1)}=2x^{(j)}-(2m+1),$$

$$x^{(j)}\equiv 2^j x \ (\text{mod. } \overline{2m+1}).$$

A mi most már azt fejezi ki, hogy az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés két egymásra következő eleme helyet foglal a $2m+1=n$-re vonatkozó, $2x\equiv r_x\,(\mathrm{mod.}\ n)$ törvényű (14) alatti lineáris helyettesítés valamelyik cziklusában, úgy azonban, hogy őket a cziklusban általában egy vagy több m-nél nagyobb elem választja el. Ezen észrevétel általánosítása nyilvánvalóan a következő tételre vezet. *Az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés mindenik cziklusa bennfoglaltatik a $2m+1=n$-re vonatkozó, $2x$ törvényű lineáris helyettesítés valamelyik cziklusában, még pedig az előző cziklust az utóbbiból úgy nyerjük, hogy ebből egyszerűen kihagyjuk az $m=\frac{n-1}{2}$-nél nagyobb elemeket.*

Így például az $n=23$-ra vonatkozó, $2x$ törvényű lineáris helyettesítés az

$$(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 9,\ 18,\ 13,\ 3,\ 6,\ 12)$$

és

$$(5,\ 10,\ 20,\ 17,\ 11,\ 22,\ 21,\ 19,\ 15,\ 7,\ 18)$$

cziklusokból áll és ezekből a 11-nél nagyobb elemek kihagyásával valóban megkapjuk az $m=11$-re vonatkozó policziklikus helyettesítés cziklusait.

Könnyű továbbá belátni azt, hogy az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés ugyanannyi cziklusból áll, mint a mennyiből a $2m+1=n$-re vonatkozó $2x$ lineáris helyettesítés. Azt kell ugyanis csupán kimutatni, hogy az n-re vonatkozó helyettesítés minden cziklusa tartalmaz legalább is egy $\frac{n-1}{2}=m$-nél kisebb elemet. Tegyük fel az ellenkezőt és állítsuk azt, hogy létezik olyan cziklus, a mely csupa m-nél nagyobb elemből áll. Ha a cziklus kezdő eleme x, akkor a második elem $2x-n$, a harmadik $4x-3n$ és az utolsó $2^t x-(2^t-1)n$; és így kellene, hogy az erre következő elem megint x legyen, vagyis kellene, hogy

$$2^{t+1}x-(2^{t+1}-1)\,n=x,$$

a honnan az következnék, hogy

$$x = n,$$

a mi azonban lehetetlenség mert hiszen $x \leq n-1$.

Ily módon a (4) képlet fogja megadni a policziklikus helyettesítés cziklusainak számát; vagyis *az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés cziklusainak számát az*

$$l = \Sigma \frac{\varphi(q)}{\delta(q)} \tag{36}$$

képlet határozza meg, a mely képletben q gyanánt rendre a $2m+1 = n$ összes valódi osztóit kell venni és $\delta(q)$ jelenti a 2 kitevőjét modulo q.

E tétel speciális alkalmazása gyanánt jelentkezik annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a policziklikus helyettesítés irreduczibilis legyen. E szerint *az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés akkor és csakis akkor irreduczibilis, ha a $2m+1$ törzsszám és a 2 ennek primitiv gyöke.*

A (3) alatti lineáris helyettesítésre talált eredményekből következik, hogy az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítésnél mindazok az elemek, melyeknek az $n = 2m+1$-gyel való legnagyobb közös osztójuk $d = \frac{n}{q}$, $\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}$ különböző cziklusba oszolnak szét. Ha egy ilyen cziklusnak elemszáma ρ, akkor a cziklus bármelyik elemére fennáll a (35) képlet, a mely szerint

$$x_1 = dq \frac{2^{\Delta-1} - (2^{s_2+\cdots+s_\varrho-1} + 2^{s_3+\cdots+s_\varrho-1} + \cdots + 2^{s_\varrho-1} + 1)}{2^{\Delta}-1},$$

a hol rövidség kedvéért

$$\Delta = s_1 + s_2 + \cdots + s_\varrho.$$

A fenti képletet

$$x_1(2^{\Delta}-1) = dqE$$

alakban írván, látjuk, hogy mivel x_1 és q már relativ primek, azért szükségképen

$$2^{\Delta}-1 \equiv 0 \pmod{q}.$$

Ha tehát 2 a $\delta(q)$ kitevőhöz tartozik modulo q, akkor kell, hogy

$$\Delta = K\delta(q),$$

a hol K pozitiv egész szám. Ki fogjuk azonban mutatni azt, hogy szükségképen $K=1$. A q valódi osztótól meghatározott $\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}$ cziklusba tartozó elemek szakasz-rendszámainak összege az imént mondottak szerint

$$\delta(q) \sum_{i=1}^{\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}} K_i$$

és így az összes elemek szakasz-rendszámainak összege:

$$\sum_{x=1}^{m} s_x = \sum \delta(q) \sum_{i=1}^{\frac{\varphi(q)}{\delta(q)}} K_i.$$

És ennek az összegnek a (27) szerint egyenlőnek kell lenni $2m$-mel. Ha csak egyetlenegy olyan K_i léteznék, a mely egynél nagyobb volna, akkor

$$\sum_{x=1}^{m} s_x > \sum \delta(q) \frac{\varphi(q)}{\delta(q)} = \sum \varphi(q).$$

Ismeretes azonban a φ függvény azon tulajdonsága, hogy q alatt értvén rendre az n-nek minden valódi osztóját

$$\sum \varphi(q) = n-1.$$

Így aztán feltevésünkből az következnék, hogy

$$\sum_{x=1}^{m} s_x > 2m,$$

a mi lehetetlenség. Ezzel be van bizonyítva, hogy a policziklikus helyettesités valamelyik cziklusában foglalt elemek szakasz-rendszámainak összege $\delta(q)$, a hol $q = \frac{n}{d}$ (d jelentvén az elemeknek n-nel való legnagyobb közös osztóját) és hogy a cziklus bármelyik elemére érvényes az

$$x_1 = n\frac{2^{\delta(q)-1}-1-L_1}{2^{\delta(q)}-1} \tag{35'}$$

képlet, a hol

$$s_1+s_2+\cdots+s_\varrho=\delta(q),$$

$$L_1=2^{s_2+\cdots+s_\varrho-1}+2^{s_3+\cdots+s_\varrho-1}+\cdots+2^{s_\varrho-1}.$$

Hátra van most még annak a vizsgálata, hogy miképen lehet megállapítani a policziklikus helyettesítés valamelyik ciklusának elemszámát. A fentiekből erre vonatkozólag mindenekelőtt az következik, hogy az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés egy bizonyos cziklusa annyi elemből áll, a hány m-nél nem nagyobb elemet tartalmaz a $2m+1=n$-re vonatkozó $2x$ lineáris helyettesítés megfelelő cziklusa. A közelebbi vizsgálat mutatja, hogy két lényegesen különböző eset adhatja magát elő. Az első eset alá tartoznak az olyan q valódi osztótól meghatározott cziklusok, a melyre vonatkozólag $\delta(q)$ páros szám és

$$2^{\frac{\delta(q)}{2}}\equiv -1 \pmod{q}. \tag{37}$$

Tudjuk azonban azt, hogy ekkor a $2m+1=n$-re vonatkozó lineáris helyettesítés $\delta(q)$ elemszámú cziklusai olyanok, hogy a c_i és $n-c_i$ mindig egy cziklusba tartozik; ennélfogva bármelyik ilyen cziklusban $\frac{\delta(q)}{2}$ számú elem van m-nél nem nagyobb és ugyanennyi m-nél nagyobb, úgy hogy *a policziklikus helyettesítés megfelelő cziklusa* $\frac{\delta(q)}{2}$ *elemet tartalmaz.*

A második esetet adó cziklusokat az olyan q valódi osztó határozza meg, a melyre vonatkozólag a $\delta(q)$ vagy páratlan szám, vagy olyan páros szám, hogy a (37) kongruenczia nincsen kielégítve. Ekkor, mint tudjuk, a $2m+1=n$-re vonatkozó $2x$ lineáris helyettesítés cziklusai párjával társcziklusokat alkotnak, melyek azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy ha a c_i elem egy bizonyos cziklusban fordul elő, akkor az $n-c_i$ elem a társcziklusában foglal helyet. Tudjuk továbbá a (13) egyenlet alkalmazásával azt is, hogy ha két társcziklus általános elemeit c'_i-vel, illetőleg c''_i-vel jelöljük, akkor

$$\sum c'_i = \sigma' n \quad \text{és} \quad \sum c''_i = \sigma'' n,$$

a hol

$$\sigma' + \sigma'' = \delta(q).$$

Legyen az első cziklusban ρ' számú olyan x'_i elem, a mely $\frac{n-1}{2} = m$-nél nem nagyobb és a második cziklusban az ilyen x''_i elemek száma legyen ρ'', úgy hogy ρ' és ρ'' fogják jelenteni az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés két társcziklusának elemszámait, ekkor a fenti két egyenlet írható még úgy is, hogy

$$\sum_{i=1}^{\rho'} x'_i + \sum_{i=1}^{\rho''} (n - x''_i) = \sigma' n \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\rho''} x''_i + \sum_{i=1}^{\rho'} (n - x'_i) = \sigma'' n,$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{\rho'} x'_i - \sum_{i=1}^{\rho''} x''_i = (\sigma' - \rho'') n \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\rho''} x''_i - \sum_{i=1}^{\rho'} x'_i = (\sigma'' - \rho') n. \tag{38}$$

Ha 2 a δ kitevőhöz tartozik modulo n, akkor

$$\delta = t\delta(q),$$

a hol a t szorzó valami pozitiv egész szám. A policziklikus helyettesítés egyik cziklusának x'_i eleme a (35') képlet szerint kielégíti a következő egyenletet:

$$x'_i \frac{2^{\delta(q)} - 1}{n} = 2^{\delta(q)-1} - 1 - L_i.$$

Itt a jobboldalon kifejtve gondolva 2 csökkenő hatványainak összege gyanánt, ez az összeg $\delta(q) - \rho'$ tagból fog állani, mert a $2^{\delta(q)-1} - 1$, mint geometriai haladvány $\delta(q) - 1$ tagot ád, melyeknek együtthatói közt előfordul minden egész szám $\delta(q) - 2$-től kezdve egészen zérusig és a levonandó L_i pedig $\rho' - 1$ különböző hatványnak az összege, melyben a legnagyobb kitevő legfeljebb $\delta(q) - 2$.

Ha ép úgy, mint az első fejezetben, bevezetjük a

$$Q=\frac{2^{\delta}-1}{n}$$

jelölést és ha az $x_i'Q$ számot előállítva gondoljuk, mint 2 csökkenő hatványainak összegét, akkor könnyen megállapíthatjuk ezen összeg tagszámát. Ugyanis

$$x_i'Q=x_i'\frac{2^{t\delta(q)}-1}{n}=x_i'\frac{2^{\delta(q)}-1}{n}\left(1+2^{\delta(q)}+2^{2\delta(q)}+\dots+2^{(t-1)\delta(q)}\right)$$

és itt a jobboldalon végrehajtva a szorzást, csupa különböző kitevőjű tagot kapunk, a melyeknek száma az imént mondottak szerint nyilvánvalóan $t\left(\delta(q)-\rho'\right)$ lesz.

Ámde ezen tagszámra vonatkozólag még egy másik kifejezést is állithatunk fel. Az x_i' szám ugyanis beletartozik az n-re vonatkozó $2x$ törvényű lineáris helyettesítés egyik cziklusába és így előállítván az $x_i'Q$ számot a kettes számrendszerben, vagyis az

$$x_i'Q=\sum_{k=1}^{\delta}A_k2^{\delta-k}$$

alakban, az A_k együtthatók összegére vonatkozólag fennáll az első fejezetben megállapított (21) képlet, a mely esetünkben a következő egyszerűbb alakot veszi fel:

$$\sum_{k=1}^{\delta}A_k=t\sigma',$$

a hol most, mivel A_k csak zérus vagy 1 lehet, a $t\sigma'$ egyúttal megadja a fenti sorkifejtés zérustól különböző tagjainak számát.

Összehasonlítva a tagszámra vonatkozólag talált két különböző kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$\delta(q)-\rho'=\sigma',$$

$$\rho'=\delta(q)-\sigma'=\sigma'' \tag{39'}$$

és ennek figyelembe vételével még arra vezetnek a (38) egyenletek, hogy

$$\rho'' = \delta(q) - \sigma'' = \sigma', \tag{39''}$$

$$\sum_{i=1}^{\varrho'} x_i' = \sum_{i=1}^{\varrho''} x_i''. \tag{40}$$

A második eset alá tartozó cziklusok számára tehát a következő sajátságos törvényszerűségeket találtuk. *A cziklusok párjával társcziklusokat alkotnak és két-két társcziklusban foglalt elemek összege ugyanaz. Az n-re vonatkozó 2x törvényű lineáris helyettesítés ket társcziklusában megalkotva az elemek összegének és n-nek hányadosát, az első, illetőleg a második hányados adja meg az m-re vonatkozó policziklikus helyettesítés megfelelő két társcziklusa másodikában, illetőleg elsejében az elemszámot, a mely két elemszám összege $\delta(q)$.*

Így a már az előzőkben példaképen felhasznált $m = 11$, $n = 23$ esetben az n primszám volta miatt a q egyedüli értéke $q = n = 23$ és mivel $\delta(23) = 11$, azért $\frac{\varphi(23)}{\delta(23)} = 2$ cziklus lesz, a melyek a δ páratlan volta miatt társcziklusokat alkotnak. A policziklikus helyettesítés első cziklusában, mint láttuk, 7 és a másodikban 4 elem van és az elemek összege mindenikben 33; míg az $n = 23$-ra vonatkozó lineáris helyettesítés két társcziklusának elsejében $92 = 4 . 23$ és másodikában $161 = 7 . 23$ az elemek összege.

A fentiek szerint általános érvényű összefüggés áll fenn az x_i elem cziklusának elemszáma és az x_iQ-nak, mint 2 csökkenő hatványai szerint rendezett sornak, zérussal egyenlő együtthatói száma között. Legyen ugyanis az x_iQ sorkifejtésében a zérustól különböző együtthatók száma S és a periodusok száma t, ekkor

$$S = t(\delta(q) - \rho) = \delta - t\rho,$$

$$\rho = \frac{\delta - S}{t}, \tag{41}$$

a hol $\delta - S$ a zérusegyütthatók számát adja meg. Úgy, hogy az x_iQ-nak, mint kettős számrendszerbeli számnak, periodusában található zérus-együtthatók száma megadja az x_i elemet tartalmazó cziklus elemszámát.

Most utólagosan még egy tulajdonságát állapíthatjuk meg az n-re vonatkozó $2x$ törvényű lineáris helyettesítésnek. A (13) képlet szerint a helyettesítés bármelyik cziklusában foglalt elemek összege többszöröse az n-nek. Ha a $2x$ számot a legkisebb abszolut értékű maradékkal jellemezzük, akkor mindenik cziklusban pozitiv és negativ számok fordulnak elő, melyeknek abszolut értéke nem nagyobb, mint $\frac{n-1}{2}$. Könnyű most már belátni azt, hogy ilyen jellemzés mellett *bármelyik cziklus elemeinek algebrai összege zérus.* Ugyanis csak két eset lehetséges. A cziklus vagy olyan természetű, hogy az x_i és $n-x_i$, vagyis az x_i és $-x_i$ elemek benne feküsznek, mikor is az állítás helyessége közvetlenül világos; vagy pedig olyan természetű, hogy társcziklusa van, mikor is x_i'-vel jelölvén az első és x_i''-vel a második cziklus egy $\frac{n-1}{2}$-nél nem nagyobb elemét, az első cziklusba fognak tartozni az x_i' és a $-x_i''$ elemek, melyeknek algebrai összege a (40) összefüggésnél fogva zérussal egyenlő.

Ifj. Szily Kálmán.

A SZOLÁRIS KONSTANS MEGÁLLAPÍTÁSA A KALOCSAI SUGÁRZÁSMÉRÉSEKBŐL.

Bevezetés.

A Nap sugárzásának tanulmányozása és a szoláris konstans meghatározása már régóta foglalkoztatja a csillagászokat és a meteorologusokat egyaránt, a mi a természet emez állandójának fontosságánál fogva egyáltalan nem meglepő. Hiszen a napsugárzásnak az a csekély töredéke, melyet a mi Földünk felfog, lényeges forrása a bolygónkon lehetséges mindenféle mechanikai munkának és a levegő oczeánja minden mozgásának. A napsugárzás megvizsgálásából azonfelül következtetéseket vonhatunk magának a Napnak, különösen pedig a fotoszférának fizikai alkatára, mely utóbbi az a réteg, melyből a sugárzás kiindul.

Ezek a tanulmányok az utolsó 25 év alatt tetemesen előrehaladtak. Messzeható vizsgálatok a sugárzás törvényeiről, a sugárzás és hőmérséklet közti összefüggésről, az energia spektrumbeli eloszlásáról, valamint a hőmérséklet befolyásáról ezen eloszlásra biztos alapot teremtettek a Napon végbemenő hasonló tünemények tanulmányozására. Az energiaspektrum tanulmányozására és a sugárzás quantitativ meghatározására szolgáló új műszerek feltalálása és szerkesztése különösen a napsugárzás kutatását könnyítette és segítette elő. A gázoknak a légkörben való abszorpcziójára vonatkozó kisérleti kutatások oly eredményeket szolgáltattak, melyek a kozmikus fizikára, valamint a Nap fizikájára nézve egyaránt fontosak. Az ilyféle kutatások iránti érdeklődés is szemlátomást növekvőben van, úgy hogy ma már sok helyütt számos ügyes és gyakorlott megfigyelő eszközöl megfigyeléseket különösen a Nap összsugárzását illetőleg. Ám a szoláris konstansnak az összsugárzás méréseiből való meghatározásánál a főnehézséget mindig a megfigyelések feldolgozása okozta. Lényegében itt az extrapolaczió egy problemájáról van szó. A használatos régebbi, tisztán empirikus úton levezetett képletek közül, melyek a sugárzás menetét a föld felületén többé vagy kevésbbé jól adják vissza, egyetlen egy sem jogosit fel a légkör felső határáig való extrapolaczióra. Így alakult ki lassankint az a meggyőződés, hogy a szoláris konstans pontos ismeretéhez csak úgy juthatunk, ha a spektrobolometrikus méréseket összekapcsoljuk az összsugárzás egyidejű meghatározásával.

Mindazonáltal fizikusok úgy mint csillagászok folyton igyekeztek oly módszereket találni, melyek lehetségessé tegyék, hogy a szoláris konstanst a sokkal egyszerűbb összsugárzásmérésekből határozhassuk meg.

A következőkben nagyjából fogom vázolni a szoláris konstans meghatározására szolgáló módszereket, az újabb eredményeket és az erre vonatkozó szakirodalmat. A kalocsai Haynald-Observatoriumon annak igazgatója, Fényi Gyula, S. J. által 1908-ban Angström-féle pirheliométerrel eszközölt megfigyelések alapján meg fogom mutatni, hogy az újabb módszerek segitségével még mélyebben fekvő állomásokon is eléggé pontosan meg lehet határozni a szoláris konstanst az összsugárzásnak Angström-féle elektromos kompenzácziós pirheliométerrel eszközölt méréseiből. A nyert eredményekből azután következtethetünk a Nagy Magyar-Alföld fölött elterülő légkör átbocsátási képességére. Végül a szoláris konstans ekként talált értékéből meghatározom a fotoszféra effektiv hőmérsékletét.

Kötelességemnek tartom, hogy e helyen legmélyebb köszönetemet fejezzem ki Fényi igazgató úrnak méréseinek szíves átengedéseért, valamint készségeért is, melylyel a szükséges könyveket és folyóiratokat rendelkezésemre bocsátotta; továbbá dr. Kövesligethy, dr. Beke és egyet. tanár uraknak és dr. Anderkó

egyet. magántanár úrnak sokoldalú szives tanácsaikért, dr. WODETZKY úrnak pedig számos más, eléggé meg nem hálálható szívességeiért.

I. Az összsugárzás meghatározása.

Azok a műszerek, melyeket közönségesen az összsugárzás mérésére használunk, aktinométer és pirheliométer nevek alatt ismeretesek. Aktinométernek nevezzük rendesen az oly mérőeszközöket, melyek nem engednek meg abszolut, hanem csak relativ méréseket, míg ellenben a pirheliométer név az oly műszereket illeti, melyekkel abszolut méréseket lehet végezni. «Über den gegenwärtigen Zustand der Aktinometrie»[1] czímű kimerítő értekezésében CHWOLSON kritikai tárgyalásban ismerteti az összes műszereket, melyek 1892-ig a Nap sugárzás energiájának megmérésére szolgáltak. SCHEINER is adott egy 1899-ig terjedő rövid ismertetést «Strahlung und Temperatur der Sonne» czímű munkájának 18—23. lapjain.[2] Legyen szabad ennélfogva csupán a Kalocsán használt ANGSTRÖM-féle elektromos kompenzácziós pirheliométer leírására szorítkoznom. Jelenleg ez a műszer van általánosan elismerve legtökéletesebbnek a maga nemében és az 1905-ben Oxfordban tartott «International Union for Cooperation in Solar Research» kongreszszusán *normál*-műszernek fogadtatott el.

Ezen pirheliométer elve a következő:[3] Két lehetőleg egyenlő, egyik oldalukon bekormozott manganinlemez közül az egyiket kitesszük a megmérendő sugárzás hatásának, a másikat pedig, melyet egy kettős ernyő véd meg a sugárzás ellen, elektromos áram segítségével felmelegítjük. Ha az áramerősséget úgy szabályozzuk, hogy mindkét lemez egyenlő felmelegedést mutat,

[1] Repertorium für Meteorologie. XV. kötet. St. Petersburg 1892. Úgyszintén XVI. kötet. 1893.

[2] Leipzig 1899, Engelmann. V. ö. J. SCHEINER: Populäre Astrophysik. Leipzig 1908; Teubner. (241—245. l.)

[3] Wiedemann Annalen. 67. kötet 633. l. és köv. (1899.) K. ANGSTRÖM: Öfversigt of k. Vet. Akademiens förhandl. Stockholm. Nr. 5. 283. l. (1898.

akkor a sugárzási energia is egyenlő az elektromos áramtól bevezetett energiával. Legyen q a sugárzás másodpercz- és négyzetczentiméterenkint, jelölje b a lemezek szélességét, a abszorpczióképességüket, r a hosszegység elektromos ellenállását, és végül i a kompenzácziós áram erősségét, akkor:

$$baq = \frac{ri^2}{4{\cdot}19}\cdot$$

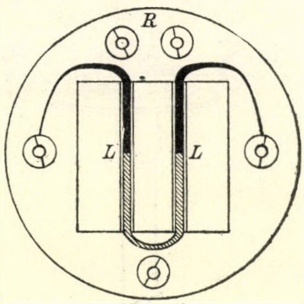
Ebből:

$$q = \frac{ri^2}{4{\cdot}19\,.\,b\,.\,a}\ \text{gr. kalor.}\ \frac{\text{cm}^2}{\text{sec.}},$$

vagy

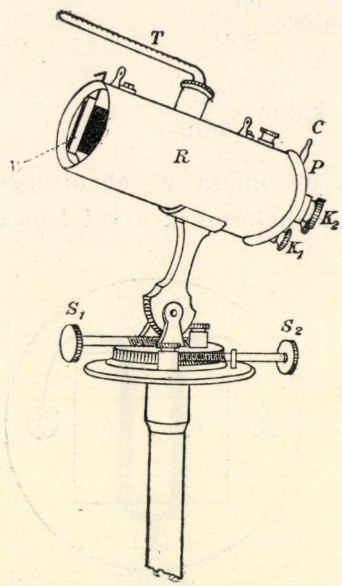
$$Q = \frac{ri^2}{4{\cdot}19\,.\,b\,.\,a}\cdot 60\ \text{gr. kalor.}\ \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}\cdot$$

Természetes, hogy a két lemez előállítása a lehető legnagyobb gonddal történik. Ezután meghatározzák a két lemez elektromos ellenállását és ha a különbség csak kevés százalékot tesz ki, két szigetelő vékony guttapercharéteg segítségével két szintén vékony rézlemezre ragasztják, a mi azért szükséges, hogy a két manganinlemeznek meg legyen a kellő stabilitása. A két rézlemez hátlapjainak lehetőleg geometriai középpontjaira vékony vörösréz- és konstantándrótból álló egy-egy termo-oszlop van forrasztva. A lánczolatosan kapcsolt termo-oszlopokat egy galvanométerrel kötjük össze. A két termo-oszlopból kiinduló áramok tehát ellentétes irányúak és kölcsönösen megsemmisitik egymást, ha egyenlő erősségűek, azaz, ha a két lemez hőmérséklete azonos.



1. ábra.

A két lemez egy kis ebonitkeretre van erősítve (R; 1. ábra, term. nagyság); L a termo-oszlopok forrasztásának helye. A manganinlemezek elülső- és a rézlemezek hátlapja lehetőleg egyenletesen bekormoztatik, hogy a kisugárzási képességben minél tökéletesebb szimmetriát kapjunk. A szimmetrikus elrendezés egyáltalán igen nagy előnye az ANGSTRÖM-féle műszernek. Könnyen érthető, hogy oly szimmetrikus elrendezésnél elesnek a hőveszteség azon korrekcziói, melyeket sugárzás, konvekczió vagy vezetés tennének szükségesekké, minthogy a két lemez egyenlő hőmérséklete a korrekcziókat is egyenlővé teszi, minélfogva ezek azután kiesnek a számításból. Ezen módszer és elrendezésnél tehát egyszer s mindenkorra meghatározzuk az r, b és a állandók értékét, az egyes sugárzásmérésnél pedig megfigyeljük az i áramerősséget és megkapjuk a sugárzást abszolut mértékben.

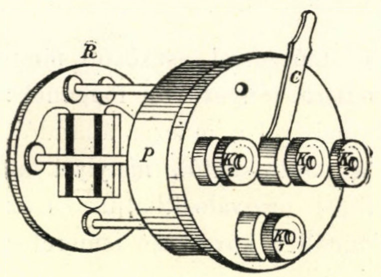


2. ábra.

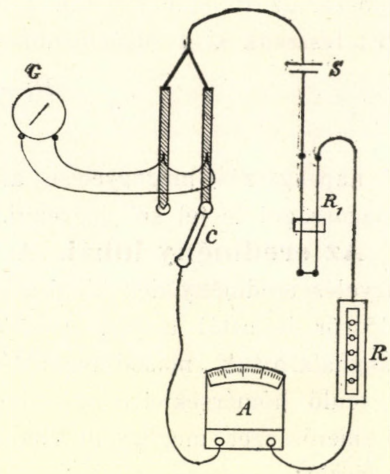
Manganinlemezek azért használatosak, mert a hőmérsékletváltozásoknál e fém elektromos ellenállása praktikusan változatlannak tekinthető, s ennélfogva számításba nem veendő.

A 2. ábra mutatja a műszer szerkezetét 1/3 term. nagyságban. A lemezek az R hengerbe vannak helyezve. A henger, mely két diafragmával van ellátva, belül kormozott, kívül fényesen polirozott. Az S_1 és S_2 csavarok segítségével a henger tetszőleges azimuthba és magasságba állítható be. A T hőmérő megadja a henger belsejében uralkodó hőmérsékletet. Egy a henger elülső nyilásába erősített kettősfalu kis ernyő W megvédi az egyik lemezt a sugárzás ellen. A henger másik végét egy ebonitdugasz P zárja el. A 3. ábra mutatja az ebonitdugaszt 2/3 term. nagyságban E dugaszra vannak erősítve a K_1 kapcsok, melyek a kompenzácziós áramot a lemezekhez vezetik, továbbá a K_2 kapcsok a thermo-oszlopok részére és egy kis kommutátor C_1, melylyel az áramot felváltva az egyik vagy másik lemezhez vezetjük.

A megfigyelés módja. Legczélszerűbb a következő elrendezés: A termo-oszlopokat összekötjük egy galvanométerrel vagy egy galvanoszkóppal. A galvanométernek természetesen lehetőleg érzékenynek kell lennie. Azonfelül, hogy elég gyorsan létesüljön a staczionárius állapot egyrészt a besugárzás másrészt a kisugárzás és hővezetés között, szükséges, hogy a galvanométer erős csillapítással birjon, úgy hogy tűjének helyzete épp oly gyorsan váljék staczionáriussá mint a lemezek hőállapota. Az elektromos melegítőáram erősségének megállapítására ANGSTRÖM a külön e czélra készült elektrodinamométert vagy pedig a Weston vagy Siemens és Halske-féle preczíziós milliampèremétert



3. ábra.



4. ábra.

ajánlja. A 4. ábra a műszer elrendezését mutatja vázlatos rajzban. *S* az áramforrás; legczélszerűbben akkummulátorokat lehet használni. *R* és R_1 rheostátok, melyek a kompenzácziós áram szabályozására szolgálnak; *A* a milliampèreméter, *C* a lemezekhez szolgáló kommutátor. A *G* galvanométer a termooszlopokkal van összekapcsolva.

Maga a megfigyelés úgy történik, hogy először is beállítjuk a műszert a megfigyelendő hőforrásra, a mi a hengeren levő diopter segítségével eszközölhető; ezután leveszszük a henger felső nyilásának fedelét és a kis ernyőt úgy forgatjuk, hogy mind a két lemez ki legyen téve a sugárzásnak és megfigyeljük a galvanométer nyugalmi helyzetét. Azután leforgatjuk az ernyőt az egyik lemez fölé, egyúttal bekapcsoljuk a melegitő áramot az árnyékban levő lemezen át és úgy szabályozzuk az áramerősséget, hogy a galvanométer teljesen az előbbi nyugalmi helyzetet mutassa. Miután leolvastuk az áramerősséget, megfordítjuk az ernyőt, meg a kommutátort és megismételjük a megfigyelést. A két megfigyelés középértéke ment minden külső zavaró behatásból származó hibától. Igen jó például a következő eljárás is: jelölje R az egyik lemezt, L a másikat. Először az R lemezt, aztán L-t és utána mindjárt még egyszer R-t teszszük ki a sugárzásnak. Akkor:

$$q = \frac{R_1 + 2L + R_2}{4}.$$

A napsugárzás megfigyelése alkalmával az időt vagy a napmagasságot is fel kell jegyezni.

Az eredmény hibái. Az ily műszerrel eszközölt megfigyelés eredményének hibái a következő tényezőktől függenek: először is attól a pontosságtól, melylyel a műszer állandóit meghatároztuk, másodszor attól a pontosságtól, melylyel az egyenlő hőmérsékletre való beállítást megvalósíthatjuk és az áramerősséget megfigyelhetjük. Fönnáll a következő ismeretes reláczió:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dr}{r} - \frac{db}{b} - \frac{da}{a} + \frac{2di}{i}.$$

Manganinlemezek alkalmazása esetében dr praktikusan egyenlő zérussal. db, azaz a lemezek szélességének változása, mely a bekormozástól ered, Angström vizsgálatai szerint legföljebb 0·01 mm-t tehet ki, miből körülbelül 2 mm lemezszélességnél db-re 0·5% hiba adódhatik. Az abszorpczióképesség hibája, da onnét származik, hogy egy bekormozott felület abszorpcziója némiképen szelektiv, azaz nem azonos minden hullámhossz számára. Napsugaraknál az abszorpczióképesség 98·3 és 98·8 között ingadozik. Ha a kormozott felületek abszorpczióképességét minden hullámhosszra állandóan 98·5-nek veszszük, úgy ebből a sugárzás intenzitásának megállapitására legföljebb 0·5%-nyi hiba származhatik. A *di*-ből eredő hiba nagy mértékben függ azon különös körülményektől, melyek között a méréseket eszközöltük. De némi figyelem és gyakorlat bizonyosan lehetségessé teszi, hogy az áramerősséget 0·3%-nyi pontossággal határozzuk meg. *Q*-nak *di*-ből eredő hibája tehát legföljebb 0·6%-ot fog kitehetni. Ennélfovva *Q* egy egyes meghatározásának összhibája legföljebb 1·6% lehet, miből 1·0% állandó, 0·6% pedig esetleges hibának tekintendő.[1]

A kalocsai elrendezés. A megfigyelések az Observatorium nagy kupolájában eszközöltettek, hol stabil felállítású ampèreméter és galvanométer van elhelyezve. A pirheliométer a kupola nyilásába helyeztetik. A rendkívül érzékeny és erős csillapitással biró galvanométert maga az igazgató készítette az Observatorium műhelyében. A galvanométer tűje pókhálófonálra van felakasztva, melynek torziója praktikusan zérusnak vehető. Az áramerősség meghatározására egy Siemens és Halske-féle precziziós milliampèreméter (82602 sz.) szolgált. Ez a műszer 0·005 ampère direkt leolvasását engedi meg, míg a beosztás tizedrészeit könnyen lehet megbecsülni. Áramforrásul egy 4 volt feszültségű akkumulátortelep szolgált.

A napmagasságok megmérése diopter segítségével történt és ellenőrzés czéljából minden egyes megfigyelés ideje is gondosan feljegyeztetett. Számítás útján meggyőződtem az összes adatok megbizhatóságáról. A számos mérés között alig akadt egy-kettő, melyeknél napmagasság és idő nem egyeztek. Valamennyi előforduló eltérés a megfigyelési hibák határain belül

---

[1] Abbot azt állítja [Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution Vol. II. (118. lap, 2. jegyzet) Washington 1908], hogy az Angström-féle pirheliométerrel eszközölt mérések átlag 9%-kal kisebbek, semmint lenniök kellene. Egy 1909 április 2-án kelt «report»-ban ezt az állítását visszavonja, t. i. az ő új *«water-flow pyrheliometer»*-jének skálájában egy hibára bukkant, úgy hogy az ő eredményei 7·6%-kal túlnagyok. A 9%-ból tehát már csak 1·4% marad fenn. Már most Angström maga megengedi, hogy abszolut méréseknél a hiba 1·6%-ot tehet ki. Ez egy újabb bizonyitéka az Angström-féle pirheliométer használhatóságának,

feküdt. Ebből azután az áramerősség adatainak megbizhatóságára is következtethettem.

Az a körülmény, hogy a kupola forgatásánál annak vasalkatrészeinek helyzete és felmelegítése folyton változik, szükségessé tette minden egyes leolvasás előtt és után a galvanométer nyugalmi helyzetének (zéruspontjának) különös gonddal történt újból való meghatározását.

Angström tanár úr szívességből maga határozta meg *97-bis* számú műszerünk állandóit. Ezek a következők:

A lemezek közepes ellenállása ... ... $r = 0{\cdot}2258$ ohm pro cm.
A lemezek szélessége ... ... $b = 0{\cdot}198$ cm.
A felület abszorpczióképessége ... ... $a = 0{\cdot}98$

Ebből adódik a k állandó értéke:

$$k = \frac{r}{4{\cdot}19b\,.\,a} \cdot 60 = 16{\cdot}70$$

és a sugárzás:

$$Q = ki^2 = 16{\cdot}70\,.\,i^2 \text{ gr. kalor. } \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}\cdot$$

Itt idéznem kell Scheiner egy megjegyzését,[1] melynek helyességét mindenki el fogja ismerni, ki valaha Angström-féle pirheliométerrel méréseket végzett: «Bizonyos megelégedéssel tölt el az ezzel a műszerrel való megfigyelés, mivel mindinkább érezzük, hogy biztos úton járunk és hogy eredményeink iránt bizalommal lehetünk». A műszer különböző fényforrások sugárzásának laboratoriumi mérésére is igen alkalmas. Scheiner [2] e műszerrel a Stefan-féle törvény állandójának újból való meghatározását is megkisérelte.

---

[1] Untersuchungen über die Solarkonstante und die Temperatur der Sonne. (Publ. d. astrophys. Observatoriums zu Potsdam. Nr. 55. III. p. 8. (1908.)

[2] U. o. 72. l. és köv.

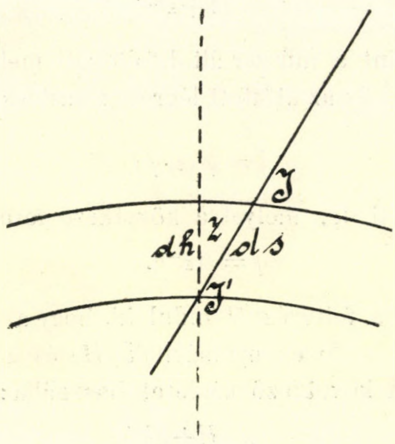
II. Az abszorpczió befolyása a sugárzásra.

Ismeretes, hogy a napsugárzás a zenittávolság függvénye. A sugárzásnak a zenittávolságtól való eme függésének kifejezésére különböző kutatók különböző képleteket állítottak fel. Első helyen nevezendő a Bouguer-Pouillet-féle képlet, melynek elmélete Pouillet szerint röviden a következő:

Legyen q a sugárzás intenzitása, dq a sugárzás változása egy dh vastagságú és ρ sűrűségű légrétegen való áthatolásnál. Egy ily réteg térelemének tömege ennélfogva ρdh. De Pouillet szerint a sugárzásbeli veszteség arányos az átsugárzott levegőréteg tömegével. Lesz tehát:

$$dq = -cq\rho dh. \tag{1}$$

Ebben a képletben c egy állandót jelent, még pedig a levegő abszorpcziós együtthatóját. Azonban, ha a Nap zenittávolsága



5. ábra.

z, akkor a sugárnak a ds útat kell megtennie és az (1) képlet dh-ja helyébe jön $dh \sec z$. Tetszőleges zenittávolságnál tehát

$$dq = -cq\rho ds = -cq\rho \sec z dh. \tag{1'}$$

És

$$q = Ae^{-c\int_0^\varrho \varrho ds} = Ae^{-c\int_0^\varrho \varrho \sec z dh}. \tag{2}$$

Itt A jelenti a soláris konstanst, azaz a sugárzást a légkör felső határán, hol

$$\rho = 0 \quad \text{és} \quad q = A.$$

Az $\int_0^\varrho \rho ds$ integrál a sugártól átfutott egész levegő-réteg tömege a légkör felső határától a megfigyelés helyéig.

Jelöljük M-mel a tömegegységet, értve ezalatt egy levegő-oszlop tömegét a Napnak $z = 0$ zenittávolságnál [$\sec z = 1$; $ds = dh$]; legyen továbbá:

$$\varepsilon = \frac{1}{M} \int_0^\varrho \rho ds \quad \text{és} \quad p = e^{-cM},$$

akkor

$$q = Ae^{-cM\varepsilon} = Ap^\varepsilon. \qquad (3)^1$$

Crova[2] a következő empirikus képletet állította fel:

$$q = \frac{A}{(1+\varepsilon)^m}.$$

Bartoli[3] szerint a műszer által fölfogott melegmennyiség a páranyomástól (f) és az átfutott légréteg vastagságától (ε) függ. Méréseiből az

$$A = \varphi\,(\varepsilon, f)$$

vonatkozást vezeti le, melyet a következő formában használ:

$$q = A\varepsilon^{-n}.$$

Violle[4] abból a feltevésből indul ki, hogy a sugárzás intenzitása függvénye a levegőnyomásnak (H) és a közepes páranyomásnak (f). A következő képletet használja:

$$Q = Ap\frac{H+bkf}{760}\cdot\varepsilon,$$

hol A, p és k állandók; b pedig ama levegőréteg vastagságát

---

[1] Comptes Rendus 7, 24.
[2] Comptes Rendus 125.
[3] Nuovo cimento. 1894.
[4] Annales de Chimie et de Physique X. 1877.

jelenti, mely a megfigyelés helyétől azon magasságig terjed, hol a páranyomás elenyészik.

Ricco[1] a sugárzás intenzitását kizárólagosan a légnyomástól (P) függőnek tételezi fel. Megfigyelései redukcziójához az ő saját empirikus képletét alkalmazza, t. i.

$$Q = A + B(760 - P)^{\frac{1}{2}},$$

hol A és B konstansok.

Ezen képletek segitségével elő lehet állitani a sugárzás napi menetét z bizonyos határai között; a szoláris konstans megállapitásához egy sem alkalmas.

Néhány évvel ezelőtt Bemporad[2] egy új, ugyancsak empirikus formulát állitott fel, melyben három állandó és az átsugárzott légtömeg parabolikus függvénye szerepel. E képlet a következő:

$$q = Ap^{-\varepsilon^n}.$$

Itt n egy valódi törtet jelent. Ha $n = 1$, akkor előáll a Bouguer-Pouillet-féle formula. Ezt az n kitevőt minden megfigyelési nap és hely számára külön kell megállapitani. Az n legalkalmasabb értékét úgy találjuk, hogy a megfigyelések közül kiválasztunk három olyant, melyeknél a zenittávolságok erősen különböznek, úgy hogy a megfelelő q_1, q_2, q_3 sugárzási intenzitások és az ε_1, ε_2, ε_3 légtömegek értékei is különbözők legyenek. Az igy nyert három egyenletből eliminálva az a és b állandókat nyerjük az

$$\frac{\varepsilon_1^n - \varepsilon_2^n}{\varepsilon_2^n - \varepsilon_3^n} = \frac{\log q_2 - \log q_1}{\log q_3 - \log q_2}$$

transcendens egyenletet, melyből az n értékét szukczesszív közelitéssel találhatjuk, ha csak a kiválasztott megfigyelések

[1] Sopra le Recenti misure della Costante Solare. — Memorie della R. Acc. delle scienze di Torino 1897—98.

[2] Misure attinometriche. Mem. Soc. Spettroscopisti Italiani. Vol. XXXVI. 1907. — V. ö. Meteorol. Zeitschrift 1907.

zenittávolai lehetőleg különbözők. Az n pontos meghatározása már csak azon oknál fogva is fölösleges, mert az alapul vett q_1, q_2 és q_3 értékek általában még észlelési hibákat tartalmaznak.

Dr. ALESSANDRINI[1] az 1907 nyarán a Monte Rosá-n (Osservatorio Regina Margherita) eszközölt pirheliométrikus megfigyeléseit ezen képlet segítségével redukálta. Ekként nyert jó eredményei a BEMPORAD-féle formula használhatósága mellett szólanak, legalább is a mennyiben nagy magasságban eszközölt sugárzásmérések jönnek tekintetbe. Ily módon ALESSANDRINI egyszerű extrapolacziós eljárás segítségével a szoláris állandó értéket $Q = 2{\cdot}086$ gr. kal. $\frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}$-nak találja.

Ezt a képletet azonban a kalocsai megfigyelésekre nem tudtam alkalmazni, minthogy öt nap kivételével a BEMPORAD követelte feltételek nincsenek teljesítve. Hogy tehát a légkör átbocsátási képességének meghatározására — a Nagy Magyar-Alföldre nézve — az egész év minél több napját használhassam fel, a BOUGUER-POUILLET-féle formula mellett határoztam.

Ha a BOUGUER-POUILLET-féle képlet szigorúan helyes lenne, akkor az extinkcziós-görbe egy logarithmikus görbe lenne, a transzmissziós együtthatót pedig, melynek ebben az esetben állandónak kellene lennie, a

$$\lg q = \frac{1}{\text{subtangens}}$$

reláczió szolgáltatná.

A különböző zenittávolságoknak megfelelő úthosszak kiszámítására BOUGUER egy képletet állított fel, mely egészen 80°-nyi zenittávolságokig teljesen megfelel. Ha z-vel jelöljük a Nap zenittávolságát, l_0-sal az úthosszt $z=0$ zenittávolban, homogén és mindenütt egyenletes nyomású légkörben, a melyben tehát $l_0=8{\cdot}0$ km-nek veendő, ha továbbá a-val jelöljük

[1] La radiazione solare al Monte Rosa. — Mem. Soc. Spettroscopisti Italiani. Vol. XXXVII. 1908.

a Föld sugarát = 6365 km, akkor a z zenittávolnak megfelelő l úthosszt adja a következő képlet:

$$l = l_0\left[\sec z - \frac{l_0}{2a}\operatorname{tg}^2 z \sec z + (l_0 - \tfrac{1}{3}a\cos^2 z)\frac{l_0 \operatorname{tg}^2 z}{2a^2\cos^3 z}\right].$$

Az így nyert értékek ellenőrzésére használhatjuk az ismeretes LAPLACE-féle formulát:

$$l = \frac{h}{760}\cdot\frac{\text{refrakczió}}{58''.4 \sin z},$$

hol h a légnyomást jelenti milliméterekben.

BEMPORAD, azon föltevés mellett, hogy a légkör hőmérséklete kilométerenkint 6°.22-kal egyenletesen fogy, megadta az úthosszak kiszámítására szolgáló képletek szigorú alakját[1] külön segédtáblázatokkal együtt.

Jelöljék δ és δ_0 a levegő sűrűségét egy bizonyos magasságban, illetve a föld felszínén, jelölje továbbá $d\sigma$ a refrakcziós görbe egy ívelemét, akkor a sugár útjának hossza a levegőben:

$$F(z) = \frac{1}{\lambda}\int_0^H \frac{\delta}{\delta_0}\, d\sigma. \qquad (1)$$

jelenti a levegő tömegegységét, azaz egy atmoszféra tömegét függőleges irányban; H a légkör teljes magassága. Jelölje most már i azt a szöget, melyet a refrakcziós görbe a h magasságban a szférikus niveaufelületek normálisával képez, akkor

$$d\sigma = \frac{dr}{\cos i}\cdot$$

Az (1) képlet további átalakítására BEMPORAD a refrakcziós elméletből a következő vonatkozásokat használja fel:

$$r\mu \sin i = a\mu_0 \sin z,$$

---

[1] BEMPORAD: L'assorbimento selettivo dell' atmosfera terrestre sulla luce degli astri. — Mem. della R. Acc. dei Lincei. ser. 5a. Vol. V. 1904. V. ö. BEMPORAD: Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre. — Mitth. des Grossherz. Sternwarte zu Heidelberg (astron. Institut) Nr. 4. 1904.

ebből

$$\cos i = \sqrt{1 - \left(\frac{a\mu_0}{r\mu}\right)^2 \sin^2 z.}$$

Itt a jelenti a megfigyelés helyének távolságát a föld középpontjától, z a látszólagos zenittávolt, μ és μ_0 a levegő törésmutatóját h magasságban, illetve a megfigyelés helyén; r a légkör felső határának távolsága a föld középpontjától.

Segítségül veszi továbbá a LAPLACE-féle relácziót:

$$\mu^2 = 1 + 2c\delta$$

és bevezeti a légkör redukált magasságát:

$$s = \frac{h}{a+h} = \frac{r-a}{r}$$

és a levegő relativ sűrűségét $x = \frac{\delta}{\delta_0}$. Az úgynevezett refrakcziós állandóra, α-ra, felveszi:

$$\alpha = \frac{c\delta_0}{1+2c\delta_0} = \frac{\mu_0^2 - 1}{2\mu_0^2}.$$

Ezen relácziók felhasználásával (1) a következő alakot ölti:

$$F(z) = \frac{1}{\lambda} \int_0^H \frac{x dh}{\sqrt{1 - \left(\frac{a\mu_0}{r\mu}\right)^2 \sin^2 z}}. \tag{2}$$

Néhány további átalakítás után találjuk, hogy

$$F(z) = \frac{a}{\lambda \sqrt{2} \sin z} \int_0^H \frac{x \sqrt{1 - 2\alpha(1-x)} \, . \, (1 + 2s + \cdots) \, ds}{\sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{cotg}^2 z - \frac{\alpha}{\sin^2 z}(1-x) + s - \frac{1}{2} s^2}}.$$

Tegyük most:

$$K = \frac{a}{\lambda \sqrt{2} \sin z}; \quad Z^2 = \tfrac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 z; \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{\sin^2 z}; \quad S = \frac{H}{a+H},$$

akkor $F(z)$ végleges alakja lesz:

$$F(z) = K \int_0^S \frac{x\sqrt{1-2\alpha(1-x)}\,.\,(1+2s+\cdots)\,ds}{\sqrt{Z^2-\varepsilon(1-x)+s-\frac{1}{2}s^2}}. \tag{3}$$

Föltéve, hogy a levegő hőmérséklete a magassággal egyenletesen fogy, úgy hogy

$$t-t_0 = -\beta as,$$

akkor ezekből a relácziókból:

$$p = \delta(1+mt) \quad \text{és} \quad ldp = -\left(\frac{a}{a+h}\right)^2 \delta dh$$

nyerjük, hogy $x = (1-\gamma s)^k$,

hol
$$\gamma = \frac{m\beta a}{1+mt_0},$$

$$k = \frac{a}{\gamma l} - 1 = \frac{1}{m\beta l_0} - 1.$$

Legyen most a hőmérséklet gradiense $\beta = 6^\circ\!.22$ km-ként, akkor

$$S = \frac{1}{\gamma} = 0\text{·}006894; \quad H = 43 \text{ km}; \quad k = \frac{9}{2}$$

és következőleg

$$\lambda = l\left(1 + \frac{1}{13\gamma} + \frac{8}{65\gamma^3} + \cdots\right) = 8\text{·}010898 \text{ km}.$$

Fejtsük most Taylor-sorba a $[Z^2-\varepsilon(1-x)+s]^{-\frac{1}{2}}$ kifejezést $\varepsilon(1-x)$ hatványai szerint és legyen t egy új változó [mely azonban nem tévesztendő össze a hőmérséklettel], úgy hogy

$$t = \frac{1-\gamma s}{1+Z^2\gamma},$$

akkor

$$F(z) = \frac{C_0}{\sin z}\, T^{-\frac{2k+1}{2}} \int_0^T \frac{t^k dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{C_1}{\sin^3 z}\left\{T^{-\frac{2k-1}{2}} \int_0^T \frac{t^k dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} - T^{-\frac{4k-1}{2}} \int_0^T \frac{t^{2k} dt}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\right\} + \cdots$$

hol

$$T=\frac{1}{1+Z^2\gamma};\quad C_0=\frac{a}{\lambda\sqrt{2\gamma}};\quad C_1=\tfrac{1}{2}C_0 a\gamma.$$

$\lambda = 8{\cdot}010898$ km értéke a tengerszin magasságára vonatkozik. A Haynald-Observatorium magasságában (110 m) pedig $\lambda_{110} = 7{\cdot}901561$ km.[1] Ennélfogva az úthosszak redukcziós faktora a Haynald-Observatorium számára:

$$\frac{\lambda_{110}}{\lambda_0}=\frac{7{\cdot}901561}{8{\cdot}010898}=0{\cdot}9863.$$

A Bouguer-Pouillet-féle formula segitségével adódik Kalocsa számára a közepes transzmissziós együttható 0·776-nak. Ismeretes azonban, hogy ezen formula szerint a légkör átbocsátási képessége mindig a valódinál nagyobbnak találtatik és pedig Fowle kutatásai nyomán alacsony fekvésű állomásokon 1·124-szer nagyobb mint a spektrobolometrikus módszerrel, úgy hogy a fenti érték 0·691-re redukálódik.

A közepes transzmissziós együttható és a soláris konstans értékéből meghatározhatjuk az úgynevezett *«sugárzási állandót»*, azaz azt a melegmennyiséget, mely a Napot a zenitben állónak feltételezve, a föld felszínén 1 percz alatt 1 cm^2-nyi felületre sugároztatik. Áll ugyanis ez a reláczió:

$$m=\frac{J}{J_0},\ \text{tehát}\ J=mJ_0,$$

hol J_0 a soláris konstanst, J a sugárzási konstanst, m pedig a transzmissziós együtthatót jelenti.

Kalocsára nézve találunk $J = 1{\cdot}42$ gr. kal.

Ennek az állandónak tudvalevőleg nem annyira asztrofizikai, mint inkább klimatológiai és meteorológiai fontossága van. S noha távol vagyunk attól, hogy ezt az értéket véglegesnek tekintsük, mégis elég nagy pontossággal szolgáltathatja a sugárzási viszonyokat a Nagy Magyar-Alföldre nézve, úgy hogy meteorológiai és klimatológiai kutatásoknál joggal használhatjuk.

---

[1] L. Bemporad: L'assorbimento etc. Tavola V. és VII.

Mint már az előbb megjegyeztük, m transzmissziós együtthatónak állandónak kellene lennie abban az esetben, ha a BOUGUER-POUILLET-féle törvény teljes szigorúsággal lenne érvényes. Hogy ez nem áll, azt már LANGLEY, PERNTER, BEMPORAD, ALESSANDRINI és mások is kimutatták. T. i. m növekszik a zenittávollal, azaz az átfutott légtömeggel.

E jelenség abban leli egyszerű magyarázatát, hogy a föld légköre az égi testek fényére szelektiv abszorpczióval hat. Mert minél nagyobb az átfutott légréteg, annál nagyobb mértékben gyöngittetnek a viola és kék sugarak, míg a vörös és ultravörös sugarak, melyeknek transzmissziós együtthatója a legnagyobb, a legkönnyebben bocsáttatnak át. Ebből következik, hogy a zenittávolsággal együtt a közepes transzmissziós együtthatónak is növekednie kell. Minthogy a légkör abszorpcziója kifejezetten szelektiv, a mint azt LANGLEY spektro-bolometrikus vizsgálatai bizonyitják, ennélfogva az összsugárzás mérései a spektrobolometrikus mérések tekintetbevétele nélkül, sohasem vezethetnek bennünket annak a törvénynek pontos ismeretére, mely megállapitja a transzmissziós együttható és a zenittávolság közti összefüggést.

A *sugárzási* állandó függése a levegő páratartalmától a kalocsai méréseknél is igen szépen mutatkozik, abban az értelemben, hogy általában a sugárzás annál kisebb, minél magasabb a párafeszültség a mérés idejekor. A vízpára eme befolyását a sugárzás abszorpcziójára már LANGLEY állapitotta meg. Például augusztusban körülbelül 20%-kal kisebb sugárzást talált mint márcziusban.

A légkör legfontosabb abszorbeáló alkatrészei a porrészecskék, a vízpára és a szénsav. LANGLEY vizsgálatai szerint a porrészecskék elnyelő hatása legnagyobb az erősebben törő sugarakra, mit CLAUSIUS és lord RAYLEIGH elméletei is megerősitenek. A vízpárák abszorpcziója ellenben, a mint már TYNDALL megmutatta, annál nagyobb, minél nagyobb a sugarak hullámhossza. TYNDALL vizsgálataiból az is kiviláglik, hogy az abszorpczió annál nagyobb, minél összetettebbek az elnyelő molekulák. Így például az egyszerű gázok abszorpcziója igen csekély. Angström vizsgálatai azt bizonyítják, hogy a szénsav abszorpcziója a Nap hősugaraira oly csekély, hogy észrevehető hiba nélkül számításon kívül hagyható. A vízpára hatása sokkal intenzivebb, s ma általánosan el van fogadva az a nézet, hogy a szelektiv abszorpczióban a vízpárának van a legnagyobb része. Vannak azonban oly vélemények is, melyek a hősugárzás légkörbeli veszteségeit nem az abszorpcziónak, hanem csaknem kizárólag valami reflexiós folyamatnak akarják tulajdonítani, pl. Pernter és Wundt.[1] Hogy például Kalocsán és általában a sikságban, a levegőt némelykor betöltő tetemes mennyiségű por, valamint a konvekcziós áramok következtében keletkező légkörbeli egyenletlenségek [Schlieren] szintén gyöngítőleg hatnak a sugárzásra, azt mi is elfogadjuk. Kalocsán azonban mindeddig nem lehetett a por befolyását a sugarak gyöngítésére külön vizsgálat tárgyává tenni. Figyelembe veendő az is, hogy a vízpára és a por hatásai nagyon nehezen különíthetők el egymástól, mivel a vízpára már a telítettség beállta előtt részben lecsapódik a porra és így csak emeli az áthatlanságot, melyet a por már magában okoz. Angström vizsgálatai szerint 15, illetőleg 27%-os abszorpczióképessége van egy oly vízpárarétegnek, mely megfelel egy 2·1, illetőleg 9·9 cm-nyi cseppfolyós vízrétegnek. Mivel a vízpára a légkör alsóbb rétegeiben van konczentrálva, abszorbeáló hatásának annál nagyobbnak kell lennie, minél mélyebben fekszik a megfigyelő állomás. A mi a légkörbeli egyenlőtlenségek következtében beálló sugárzásveszteséget illeti, az teljesen ellenőrizhetetlen.

---

[1] Meteorologische Zeitschrift. XXI. 1886; 130. l. és XLII. 1907; 261. l. Ezzel ellentétben lásd Fabry: Sur la polarisation par réfraction et la propagation de la lumière dans un milieu non homogène. Comptes Rendus 145. 112. l.

III. A szoláris konstans meghatározása.

Számos kisérlet történt a sugárzási energiának az összsugárzásból származó amaz értékének kiszámítására, mely az $\varepsilon=0$ úthossznak felel meg. Ezen számítás eredményét szoláris konstansnak szokás nevezni. Méretegységei a grammkalória, cm^2 és időpercz. A szoláris állandó ennélfogva megmutatja, hogy átlag hány grammkalória hatol be perczenkint a légkör felső határának vagy pedig a légkör hiányában, a föld felületének a napsugarakra merőleges egy négyzetczentiméternyi területén. Képzeljünk egy gömböt, melynek középpontjában van a Nap és melynek sugara a Nap-Föld közepes távolsága; akkor a szoláris állandó egész általánosságban azon energiaáram intenzitását fejezi ki, mely állandóan áthatol eme gömb felületének egy cm^2-én. Az egyes kutatók, mint fent már láttuk, másmás abszorpcziós hipothéziseket vettek számításaik alapjául és az extrapoláczionál is ép annyi különböző empirikus képletet alkalmaztak. A legtöbb hipotézis a légkörnek egyenletes transzmisszió képességét tételezi fel minden hullámhossz számára.

Már Langley elődei, mint Radau és mások, elméleti úton felismerték, hogy a napsugárzás megvizsgálásának pontossága megkövetelné az egyes hullámhosszak intenzitásának megmérését. De ezen követelmény felismerése daczára mégis elfogadták a Bouguer-Pouillet-féle formulát és senki sem tett kisérletet arra nézve, hogy méréseket és számítást a teoretikus elvekkel összhangba hozza. Langley elvitathatlan érdeme, hogy vizsgálataiból száműzte ezt a fundamentális tévedést. A spektrum egyes hullámhosszai sugárzási energiájának mérésére szolgáló külön műszert, a spektrobolométert szerkesztette. A Bouguer-Pouillet-féle formulának pedig a következő alakot adta: [1]

$$q = \sum_{\lambda} A_{\lambda} p_{\lambda}^{\varepsilon}.$$

[1] Langley: Researches on solar heat. (Report of the Mount Whitney expedition.) Washington 1884. — Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. XVI.

Ebben a képletben A_λ és p_λ az egyes hullámhosszak (λ) szerint különböző értékűek.

Langley azután bolométrikus módszerével meghatározta az energiaeloszlást különböző zenittávolságokra, ebből megtalálta az egyes hullámhosszak transzmissziós együtthatóját p_λ-t és ennek alapján kiszámította az illető hullámhosszra nézve A_λ-t, vagyis a sugárzás intenzitását a légkör felső határán. Így a bolométer-adta görbe oly ideális görbére redukáltatott, mint a minőnek a légkörön kívül adódnia kellene. Az a terület, melyet a hullámhosszak megmért intenzitási görbéje bezár, jelenti az összes besugárzott melegmennyiséget. Ez azután a pirheliométrikus adatok segítségével abszolut mértékre számíttatott át; az eredmény a szoláris állandó. Langley, az ő híres Mount Whitney-i expedicziója alkalmával, két különböző állomáson, a Lone Pine-en (1146 m) és a Mountain Camp-on (3543 m), a legnagyobb pontossággal eszközölte a szükséges bolo- és pirheliométrikus méréseket. Ő a soláris állandó következő értékeit találta:

a Lone Pine-en ... ... 2·22 gr. kalor.
a Mountain Camp-on ... ... 2·06 gr. kalor.

Abbot, Langleynek hosszú éveken át asszistense és jelenlegi utóda a «Smithsonian Institution» asztrofizikai obszervatoriumának igazgatói székében, Fowle-lal együtt folytatta a megfigyeléseket Washingtonban és a Mount Wilson-on. 1901-től 1907-ig terjedő vizsgálatai eredményét az 1908. év végén tette közzé.[1] Abbot Washingtonra 2·061 gr. kalóriát talál mint középértéket, a Mount Wilson-ra 1905-ben eszközölt 59 mérésből 2·024 gr. kal.-t és 1906-beli 38 mérésből 2·020 gr. kal.-t. Végleges eredményül 2·1 gr. kalóriát fogad el, tehát oly értéket, a mely majdnem teljesen megegyezik Langley fent idézett eredményeinek középértékével.

---

[1] Annals of the astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. Vol. II. Washington 1908.

ANGSTRÖM tanár a Nap sugárzásának spektrobolométer nélkül való tanulmányozására szolgáló új módszert állított fel,[1] melyben a légkörbeli abszorpczióra vonatkozó eddigi ismereteinket felhasználja. Külön számítja ki a diffuzió által és külön a légköri gázok abszorpcziója által okozott energiaveszteséget. Föltételezi, hogy a sugárzásnak diffuzió-okozta gyöngitése követi a POUILLET-féle exponencziális törvényt, úgy hogy

$$i_\lambda = J_\lambda p^l,$$

hol J_λ = a sugárzás intenzitása λ hullámhossz számára a légkör felső határán;

p = a transzmissziós együttható, λ hullámhosszra nézve;

l = a sugár által a légkörben megtett út hossza;

i_λ = a λ hullámhossz ama sugárzási intenzitása, melyet akkor kellene megfigyelnünk, ha a különböző gázokban csupán csak diffuzió történnék abszorpczió nélkül

J_λ és p a hullámhossz függvényei, pl.:

$$J_\lambda = \Psi(\lambda); \quad p = \varphi(\lambda).$$

Ennélfogva

$$i_\lambda = \Psi(\lambda) . \{\varphi(\lambda)\}^l.$$

A λ_1 és λ_2 közti intenzitás l vastagságú légréteg átfutása után e szerint lesz:

$$q_l = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Psi(\lambda) . \{\varphi(\lambda)\}^l d\lambda. \tag{1}$$

Ez a függvény összefüggésben van a színkép természetével. ANGSTRÖM alapul veszi a már LANGLEYtől bevezetett *állandó intenzitású* színképet, melyben t. i. a diszperzió olyan, hogy a sugárzás intenzitása a színkép egész terjedelmében állandó.

Azután az állandó A intenzitást ordinátának, az x diszperziót abszczisszának véve, találja, hogy

$$J_\lambda d\lambda = \Psi(\lambda)\, d\lambda = A dx.$$

---

[1] ANGSTRÖM: Méthode nouvelle pour l'étude de la radiation solaire. — Nova acta Reg. Soc. Scientiarum Upsaliensis. Ser. IV. Vol. I. Nr. 7. (1907.)

Ha lehetséges egy egyszerű $\varphi(x)$ relácziót találni, mely a transzmissziós együtthatónak x-től való függését a Napnak állandó intenzitású színképében kifejezi, akkor az (1) formula a következő egyszerűbb alakot veszi fel:

$$q_l = A\int_{x_1}^{x_2}\{\varphi(x)\}^l dx. \qquad (2)$$

Az állandó intenzitású színképnek, valamint a $\varphi(x)$ függvény alakjának meghatározására ANGSTRÖM felhasználja úgy az ő saját, valamint LANGLEY, ABBOT és FOWLE spektrobolometrikus megfigyeléseit. $\varphi(x)$-et a következő empirikus képlettel fejezi ki:

$$\varphi(x) = 0{\cdot}93^{\delta} x^{0{\cdot}26\delta}, \qquad (3)$$

hol δ egy állandó, mely a légkörnek a mérés idejekor uralkodott állapotától függ. A (2) egyenlet tehát átmegy a következőbe:

$$q_l = q_0\int_{x_1}^{x_2}[0{\cdot}93^{\delta}\,.\,x^{0{\cdot}26\delta}]^l dx. \qquad (4)$$

Miután az állandó intenzitású spektrumot számítás útján akként határozza meg, hogy a diszperzió 0 és 1 között váltakozik, úgy hogy $x_1=0$, $x_2=1$, integráczió segítségével a Nap összsugárzásra találja:

$$Q_l = Q_0\frac{0{\cdot}93^{\delta}}{0{\cdot}26\delta l+1}\,. \qquad (5)$$

Ez a képlet szolgáltatja a diffuzió befolyását a Nap összsugárzására oly légkörben, melyben csak diffuzió lép fel.

A δ meghatározására elégséges a (4) képletet a színkép oly részére alkalmazni, melyben nem lépnek fel abszorpcziós csíkok, pl. a kék-ibolya közti részre. A színképnek ezt a részét úgy nyerjük, ha a pirheliométer elé egy megfelelő színű ernyőt — színszűrőt — helyezünk.[1] Ebben az esetben t. i. a pirhelio-

[1] Értekezése végén ANGSTRÖM inkább a színkép zöld-sárga közti részét ajánlja.

métrikus mérések közvetlenül adják q_l-t és következőleg a (4)-ből meg lehet határozni δ-t. Természetes, hogy az alkalmazott színszűrő abszorpczióképessége szerint, a (4)-et megfelelőleg át kell alakítani. A δ ekként talált értékét behelyettesítjük (5)-be és így kiszámíthatjuk Q_l-t.

Minthogy a pirheliométrikus mérés közvetlenül szolgáltatja a sugárzás értékét E_l-t, és miután Q_l-t számítás útján megtaláltuk, igen könnyen határozhatjuk meg az abszorpczió okozta energiaveszteséget, $F(x)$-et, mivel

$$E_l = Q_l - F(x). \tag{6}$$

$F(x)$ főleg a levegő vízpáratartalmától függ, azaz annak feszültségétől f-től, az átfutott légréteg vastagságától l-től, valamint δ-tól is.

Angström többrendbeli kisérlet és meggondolás után azt találja, hogy $F(x)$-et a következő képlettel lehet kifejezni:

$$F(x) = Q_0\, 0{\cdot}1\, (f\,.\,l)^{0{\cdot}275}\,.\,0{\cdot}85^{\delta l}. \tag{7}$$

A (7) egyenlet alakításánál tekintettel volt nemcsak a vízgőznek, hanem valamennyi többi gáznak, így a szénsavnak abszorpcziójára is. Ennélfogva a (6) egyenletnek a következő alakot adhatjuk:

$$E_l = Q_0 \left\{ \frac{0{\cdot}93^{\delta l}}{0{\cdot}26\delta l + 1} - 0{\cdot}1\, (f\,.\,l)^{0{\cdot}275}\,.\,0{\cdot}85^{\delta l} \right\}. \tag{8}$$

Angström ezen képlet segítségével, melyben E_l pirheliométrikus mérésekből ismeretes, a szoláris konstans középértékéül $Q_0 = 2{\cdot}15$ gr. kalóriát talál. Tehát oly értéket, mely a legújabb spektrobolométrikus mérésekből nyert eredményekkel igen jól egyezik.

Ezt a módszert alkalmazta Kimball H. az ő saját pirheliométrikus méréseire. $\varphi(x)$-re egy kissé különböző empirikus képletet talál, t. i.

$$\varphi(x) = 0{\cdot}93^{\delta}\, x^{0{\cdot}18\delta^{\frac{1}{2}}}.$$

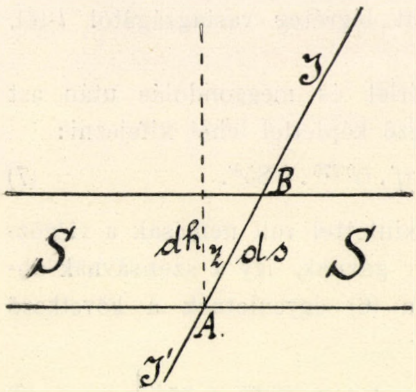
Az $F(x)$ függvényt is másképen számítja. A szoláris konstans értékül 2·05 gr. kal. talál.

Legutóbb Bellia,[1] cataniai egyetemi tanár, állított fel egy új képletet a szoláris konstans kiszámítására.

Abból a relláczióból indul ki, melyet Bemporad vezetett le Angström, Rizzo, Millochau és mások megfigyeléseiből és a mely szerint az összsugárzás abszorpcziós együtthatója c arányos a levegő sűrűségének negyedik hatványával, feltéve, hogy a sugarak közel függőleges irányban haladnak át a légrétegen. Tehát

$$c = c_0 \delta^4. \tag{1}$$

Ez az összefüggés nagy megközelítéssel érvényes minden z-re, mely $\leq 60°$. Legyen SS egy vízszintes dh vastagságú légréteg, melyen át az II' sugár hatol; legyen z a beesési szög, illetve a Nap zenittávolsága. Legyen továbbá $z \leq 60°$, úgy hogy az (1) reláczió érvényes. Az II' sugár útjának hossza a levegőrétegben lesz:



6. ábra.

$$AB = ds = dh \sec z. \tag{2}$$

Pouillet szerint egy ds vastagságú és δ sűrűségű légrétegnek egy sugárra gyakorolt abszorpcziója arányos a légréteg tömegével, úgy hogy

$$dq = -qc\delta ds \tag{3}$$

(1) és (2) (3)-ba behelyettesítve, lesz:

$$dq = -qc_0\delta^4 . \delta dh \sec z. \tag{4}$$

De Boyle törvénye alapján, mely szerint állandó hőmérsékletet tételezve föl, a levegő sűrűsége arányos a mindenkori

[1] Sopra il calcolo della costante solare. — Mem. Soc. Spettroscopisti Italiani. Vol. XXXVIII. 1909.

nyomással H-val, az (1) egyenletet a következő alakban is írhatjuk:

$$c_0\delta^4 = kH^4.$$

δdh jelenti az SS réteg egy cm^2 keresztmetszetű térrészecskéjének tömegét, vagyis azt a nyomást, melyet SS a mélyebben fekvő rétegekre gyakorol; minélfogva a nyomásnak azt a változását is dH-t, mely létesül, ha dh-nak a föld felszine fölötti magassága változik. A (4) relácziót ennélfogva a következő alakban írhatjuk:

$$dq = -k \sec z q H^4 dH. \tag{4'}$$

Mivel $k \sec z$ állandó, könnyen integrálhatjuk ezt az egyenletet. Jelölje H a megfigyelés helyén észlelt légnyomást, q a pyrheliométerrel mért sugárzást, A a szoláris konstanst, akkor

$$\int_q^A \frac{dq}{q} = -k \sec z \int_H^0 H^4 dH.$$

Ebből

$$\log q = \log A - \frac{k \sec z}{5} H^5$$

s ennélfogva

$$q = Ae^{-\frac{k \sec z}{5} H^5}.$$

Tegyük

$$e^{-\frac{k \sec z}{5}} = p,$$

akkor

$$q = Ap^{H^5}$$

vagy logarithmusos alakban

$$\log q = \log A + H^5 \log p. \tag{5}$$

Az integrálásnál feltételeztük, hogy $\sec z$ és ennélfogva z is a sugár egész útja mentén állandó. A sugártörés miatt ez ugyan nem egészen így van. De mivel a sugártörés egészen 60°-nyi zenittávolságokig felette csekély, minden nagyobb hiba nélkül z-t állandónak tekinthetjük. Ennélfogva az (5) helyes minden z-re, mely $\leqq 60°$.

Az (5) képlet, melyben A és p állandók, megadja a sugárzási intenzitást mint a sugár útja menti légnyomás függvényét. A légkör felső határán, hol $H = 0$, $q = A =$ soláris konstans. Az A és p állandók kiszámítására elégséges a sugárzásnak két különböző magasságban eszközölt egyidejű megfigyelése. Ha nem lenne szelektiv abszorpczió, úgy az A és p-re minden zenittávolságnál ugyanazt az értéket kellene találnunk. Ez azonban nem áll. Minél nagyobb z, annál kisebb értéket találunk A-ra. Ennélfogva A a szoláris konstansnak értéke, melyből le van vonva a sugárzásnak teljesen abszorbeált része. Bellia tanár ezen képlet szerint redukálta a Platania tanárral 1908-ban az Etnán közösen végzett pirheliométrikus méréseit és kiszámította A értékét $z=0°$-ra és $z=60°$-ra. Képletét Angström, Rizzo, Langley, Crova és Hansky méréseire is alkalmazta. Az eredményeket a következő táblázat mutatja:

Észlelő:	Hely és idő	A_1 ($z=0°$)	A_2 ($z=60°$)
Platania és Bellia	Etna 1908	1·73	1·59
Angström	Teneriffa 1896	1·66	1·54
Rizzo	Rocciamelone 1897	2·24	1·46
Langley	Mt. Whitney 1882	2·03	1·74
Crova és Hansky	Mont-Blanc 1897	2·12	1·64

Míg A_2 értékei mind az öt állomáson eléggé jól egyeznek, addig A_1 értékei két csoportba oszlanak. A tengermelléki állomásokon [Etna, Teneriffa] az értékek tetemesen kisebbek mint a három benső szárazföldi állomáson, melyeknek középértéke 2·13 ismét jól egyezik más kutatóknak újabb értékeivel Bellia tanár ezt a jelenséget Rizzoval úgy magyarázza, hogy a tenger közvetlen közelében a légköri abszorpczió még a magas légrétegekben is igen erős, minek oka valószínűleg a levegőben úszó kicsiny vízcseppekben keresendő.

Fowle F. E. számos bolo- és pirheliométrikus mérésből levezetett egy módszert[1] a szoláris állandónak pirheliométrikus mérésekből való kiszámítására. Mindenesetre igaz, hogy ez a módszer elsősorban csak Washingtonra érvényes szigorúan, de FOWLE nézete szerint alkalmazható oly állomásokra is, melyeknél: 1. a napsugarak légkörbeli úthossza a különböző zenittávoloknál megegyezik [azaz, ha körülbelül ugyanazon földrajzi szélesség alatt fekszenek]; 2. a tengerszín feletti magasságuk közel ugyanaz és 3. a mi a legfontosabb, melyek légkörének átbocsátó képessége ugyanaz, azaz közepes páranyomásuk egyenlő.

Kiszámítottam tehát Washingtonra[2] a páranyomás havi középértékeit az 1908. évi adatokból és a Kalocsán megfigyelt havi középértékekkel együtt a következő táblázatba foglaltam:

	A páranyomás havi középértéke 1908												Évi középérték
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	
Washington	2·6	2·3	4·5	5·2	9·5	10·9	13·6	13·4	11·0	7·6	4·4	3·2	7·35
Kalocsa ...	3·6	4·4	5·0	6·5	9·9	10·1	10·3	11·1	8·0	6·4	3·8	3·9	6·92

A megegyezés annyira kielégítő, hogy FOWLE módszerének alkalmazását a kalocsai megfigyelésekre eléggé igazoltnak tálálom, annál is inkább, mivel a két első föltétel is kellőleg teljesítve van. A kalocsai transzmissziós együtthatónak a BOUGUER-POUILLET-féle képlet alapján számított középértéke is igen jól egyezik az ugyanazon képlet szerint számított washingtoni értékkel. FOWLE t. i. Washington számára 0·788-at talál, míg a mint már fönnebb jeleztük, Kalocsa számára 0·776 adódik. A különbség tehát 0·012.

A módszer lényege igy foglalható össze: a megfigyelt sugár-

---

[1] Annals of the astrophysical observatory of the Smithsonian Institution. Vol. II. Washington 1908. 114. l. — V. ö. Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 47, 1904. 399. l.

[2] Monthly Weather Review. Washington 1908.

zási értékek logaritmusai mint ordináták, a hozzájuk tartozó zenittávolságok szekánsai mint abszciszszák méretnek le; itt azonban csak oly megfigyeléseket szabad felhasználnunk, melyeknél a zenittávolságok 66°-nál kisebbek. Az így nyert pontokat összekapcsoljuk a hozzájuk legjobban simuló egyenessel. Ezt az egyenest meghosszabbítjuk egészen az ordinátatengelyig, mely megfelel az $\varepsilon=0$ légtömegnek; az ordinátatengelynek ekként lemetszett része megadja a szoláris állandó megközelített értékének logarithmusát. Az így talált értéket redukáljuk a közepes naptávolságra, s azután még hozzáadunk 12·5%-ot. Ily módon 43 félnapból a következő értékeket nyertem:

Nap		z	ε	e	Q	J/J_0
Február	11 a	60·4—63·0	1·99—2·16	2·4	2·37	0·833
	17 a	60·2—62·0	1·98—2·10	4·1	2·37	0·712
Márczius	7 a	45·2—57·8	1·40—1·85	4·3	1·99	0·799
	28 a	50·8—64·3	1·56—2·27	4·6	2·04	0·803
Május	12 a	30·5—42·3	1·14—1·33	12·1	2·10	0·751
	12 p	28·0—33·6	1·12—1·18	12·0	2·26	0·799
	13 a	29·1—52·8	1·13—1·63	10·3	2·23	0·737
	13 p	32·9—63·6	1·16—2·21	8·7	2·03	0·789
	20 a	26·5—41·3	1·10—1·31	8·7	2·02	0·908
	21 p	36·0—38·9	1·22—1·26	6·4	2·28	0·549
	22 a	26·2—47·4	1·10—1·45	11·6	1·89	0·787
	22 p	30·9—44·6	1·15—1·38	9·8	2·02	0·696
	23 a	26·0—49·5	1·10—1·52	9·8	2·15	0·661
	30 a	24·8—40·7	1·09—1·30	13·7	1·98	0·768
Június	1 a	24·6—35·8	1·08—1·21	11·0	1·93	0·893
	1 p	31·4—48·4	1·16—1·48	8·4	1·83	0·770
	2 p	30·4—40·5	1·14—1·30	8·9	2·11	0·808
	5 a	24·2—30·2	1·08—1·14	13·8	2·05	0·884
	13 a	33·4—42·0	1·18—1·33	9·4	2·01	0·812
	20 a	25·3—45·5	1·09—1·41	14·5	2·14	0·562
	20 p	24·4—50·7	1·08—1·55	10·1	2·29	0·607

Nap		z	ε	e	Q	J/J_0
Június	21 p	23·1—37·9	1·07—1·25	7·2	2·19	0·707
	24 a	23·1—32·0	1·07—1·16	10·4	2·30	0·675
	24 p	29·5—53·8	1·13—1·67	7·5	2·20	0.708
	26 a	27·2—47·8	1·11—1·46	8·4	2·03	0·768
	26 p	23·4—40·3	1·07—1·29	6·1	2·02	0·790
	27 a	37·5—46·6	1·24—1·43	10·5	1·96	0·731
Július	12 a	24·5—57·7	1·08—1·84	12·3	1·98	0·817
	13 a	24·7—57·7	1·09—1·84	10·3	1·97	0·838
	13 p	30·0—59·2	1·14—1·92	11·6	1·91	0·810
	15 a	25·0—48·3	1·09—1·48	12·3	1·91	0·800
Augusztus	5 a	29·7—40·7	1·14—1·30	11·3	2·17	0·665
	22 a	40·9—55·4	1·30—1·73	11·5	1·92	0·848
	22 p	34·7—41·6	1·20—1·32	10·3	2·00	0·833
Szeptember	1 a	38·2—51·9	1·25—1·60	10·0	2·20	0·767
	10 a	41·4—62·6	1·31—2·14	9·7	2·02	0·820
	10 p	51·1—63·9	1·57—2·23	8·9	2·03	0·816
	23 p	46·5—57·0	1·43—1·81	6·8	1·90	0·851
	25 a	50·7—54·1	1·55—1·68	6·5	1·92	0·880
Október	1 a	49·7—64·5	1·52—2·28	5·4	1·88	0·854
	3 a	51·7—56·9	1·59—1·80	8·1	1·82	0·865
	3 p	48·9—60·4	1·50—1·99	10·3	1·91	0·784
	6 a	54·2—67·2	1·68—2·53	8·7	1·96	0·815

z = a Nap zenittávola
ε = a sugarak úthossza.
Q = a szoláris állandó.
e = a páranyomás.
a = délelőtt.
p = délután.
J/J_0 = a transzmissziós együttható

Q középértéke = 2·05 gr. kalória.
J/J_0 középértéke = 0·776.

A szoláris konstans kiszámítására szolgáló legújabb módszerek, t. i. Langley spektrobolométrikus módszere, valamint Angström és Fowlenak spektrobolométrikus és pirheliométrikus mérések kombinácziójából levezetett módszerei, melyek a légkör szelektiv abszorpczióját különösen tekintetbe veszik, a szoláris konstansnak oly közel egyező értékeit szolgáltatják, hogy jogunk van föltenni, miszerint a természet eme fontos állandójának meghatározását sikerült majdnem teljes pontossággal elérnünk, úgy hogy eme meghatározások középértékét, 2·1 gr. kalóriát, nagy bizonyossággal valódi értéknek tekinthetjük.

IV. A szoláris konstans ingadozásai.

Az összes eddigi megfigyelések bizonyítják, hogy a szoláris állandó nem éppen lényegtelen ingadozásoknak van alávetve. Abbot a szoláris konstans változásának egyik okát a Nap változó távolságában keresi.[1] A kalocsai mérésekből ilyféle összefüggés nem mutatható ki világosan. Abban a diagrammban, melyet Abbot eljárása szerint készítettem, igen feltünt a szoláris konstans rendkívül kicsiny értéke a két napéjegyenlőség ideje körül. Abbot diagrammjaiban is valami hasonló mutatkozik [l. i. h. XV. rajzlap], de 1906-ban nem oly pregnánsan mint 1905-ben. Az ő diagrammjain azonban csupán az őszi equinokczium szerepel, a soláris konstans a tavaszi napéjegyenlőség idejében való viselkedésére nézve tehát felvilágosítást nem adnak. Mindazonáltal nem szabad ebből a jelenségből következtetéseket levonnunk, mielőtt megfigyelések hosszabb sorozata nem bizonyítja, hogy a tünemény reális. Ha mégis reálisnak bizonyulna, úgy okát csak meteorológiai viszonyokban, illetőleg a Nap deklinácziójában kereshetnők.

A szoláris konstans ezen ingadozását Abbot más részben a napfoltoknak tulajdonítja. A szoláris állandó középértékeül Washingtonban 2·061, a Mount Wilson-on 2·022 gr. kalóriát talál. De mivel megfigyelései oly periodusba estek, melyben a napfoltok igen nagy számmal léptek fel és mivel az ő megfigyeléseiből következik, hogy a sugárzás nagyobb midőn a napfoltok száma csekélyebb, ennélfogva Abbot úgy véli, hogy

[1] Annals of the astrophysical observatory of the Smithsonian Institution. Vol. II. 100. l. és köv. Washington 1908.

a szoláris állandónak a fönti középértékeknél nagyobbnak kell lennie. ABBOT kerek számban 2·1 gr. kalóriát vesz fel.

A megfigyelések általában igazolják, hogy a napfoltnak úgy optikai, valamint hősugárzása is — habár az utóbbi nem épp oly arányban — csekélyebb mint a Nap egyéb helyeinek sugárzása. LANGLEY és FROST vizsgálatai szerint a Nap atmoszférája sokkal kisebb mértékben abszorbeálja a foltokból kiinduló hősugarakat, mint azokat, melyek a Napnak foltoktól mentes helyeiből sugároztatnak ki. Másrészt azonban egy foltnak vagy foltcsoportnak környezetében a fáklyák sokkal sűrűbben szoktak fellépni mint a fotoszféra egyéb helyein és nagyon lehetséges, hogy a fáklyákból kiinduló, kétségen kívül nagyobb sugárzás kiegyenlíti, sőt túl is kompenzálhatja a foltok sugárzási defektusát. Meg kell gondolnunk továbbá, hogy a foltok csak külső nyilvánulásai egy változó erősségű belső folyamatnak, melynek a látható következményeken, t. i. a foltokon kívül még egyéb kevésbbé szembetünő következményei is lehetnek. Így tehát egyáltalán nem lehetetlen, hogy erős foltképződés idejekor a középhőmérséklet és vele együtt a sugárzás is magasabb vagy alacsonyabb, mint oly periodusokban, midőn a foltképződés kisebb és pedig oly értékben, mely messze túlhaladhatja a foltok direkt hatását a sugárzásra. Hogy a Nap összsugárzása függ-e egyáltalán és mily mértékben a foltok számától, azt csak hosszú éveken át és számos helyen végzett teljes megfigyelésekből lehetne eldönteni. Nem ütközhetünk meg tehát azon, hogy egyetlen év sugárzási méréseiből ezt a függést nem lehet kimutatnunk. Hiszen a Nap hőmérsékletének csekély változása elegendő arra, hogy a szoláris állandónak relative nagy változását idézze elő.

Még kevésbbé lephet meg bennünket az a tény, hogy a szoláris állandó ingadozásai nem gyakorolnak észrevehető befolyást a földi légkör középhőmérsékletére. Tegyük fel, hogy a sugárzás $\frac{1}{80}$-dal csökken. Ha a sugárzás e csökkenése hosszabb időn át állana fenn, légkörünk középhőmérsékletének kb. 1°-kal kellene sülyednie, a mely érték a kimutathatóság határán fekszik.

A kalocsai mérések csoportositása az európai izobárok szerint szintén nem adott semmiféle összefüggést a légnyomáseloszlás és a sugárzási állandó illetőleg a szoláris konstans között. Pozitiv eredményt itt is csak sok év megfigyelési anyagának földolgozásától remélhetünk.

A szoláris állandónak eddig nyert legfontosabb értékeit a következő táblázat tünteti fel:

Megfigyelő és év	Műszer	Hely	Q	Megjegyzés
Pouillett 1838	Pouillet-féle Pirheliométer	Paris	1·76	
Lephay 1881/82	Pouillet-féle Pirheliométer	Kap Horn	2·20	A külömböző hullámhosszak bevezetése
Langley 1884	Violle-féle Aktinom. és Bolométer	Mt. Whitney	3·1	
Crova 1888	Crova-féle Aktinométer	Mt. Ventoux	3·0	
Pernter 1889	Violle-féle Aktinométer	Sonnblick	3·1—3·3	
Saveliew 1890	Crova-féle Aktinométer	Kiew	3·47	
Angström 1890	Angström-Chwolson-féle Aktinom.	Yxelő	4·00	Később ő maga visszavonta
Angström 1896	Angström féle kompenzác. Pirheliom.	Teneriffa	1·76	
Crova és Houdaille 1896	Crova-féle Aktinométer	Mont-Blanc	2·9	
Rizzo 1898	Aktinométer	Rocciamelone	2·5	
Hansky 1900	Crova-féle Aktinométer	Mont-Blanc	3·3	
Langley 1902	Aktinométer és Bolométer	alacsony fekvésü állomáson	2·19[1]	Külömböző hullámhosszak
Abbot 1903	Aktinométer és Bolométer		2·23	
Scheiner 1904	Angström-féle kompenzác. Pirheliom.	Gorner Grat	2·3	
Abbot és Fowle 1902/08	Aktinométer, Bolométer és külömb. Pirheliométer	Mount Wilson és Washington	2·1	Külömböző hullámhosszak

[1] ABBOT ezeket a megfigyeléseket még egyszer revideálta, mert úgy találta, hogy az aktinométer állandója nem volt helyesen megállapítva; a revideált érték 2·15 gr. kalória. [Annals of the Smithsonian Institution. Vol. II. 123. l.]

Jelenleg, mint ismeretes a szoláris állandónak LANGLEYtől adott értéke — kerek számban 3 gr. kalória — van általánosan elfogadva. Azonban LANGLEYnek a Lone Pine-en és a Mountain Camp-on végzett mérései 2·14 gr. kalóriát adnak középértékül,[1] mely igen jól egyezik az ABBOT és FOWLEtól LANGLEY módszere szerint talált értékkel. Sajnos, LANGLEY az általa talált értékeket kicsinyeknek tartotta és azért rajtuk két különböző korrekcziót végzett. A két különböző állomáson a Nap különböző zenittávolságainál eszközölt méréseiből ugyanis azt találta, hogy a két állomás közti levegőréteg áthatósága a Nap sugarai számára tetemesen kisebb mint a felső állomás fölötti levegőé. Mindkét esetben azonban egy egész atmoszférára szóló együtthatót vett számításba. De ez a különbség egészen természetes és magától értetődő következménye annak a ténynek, hogy nagyobb magasságokban a levegő sokkal tisztább mint alant. Már most LANGLEY azt hitte, hogy a különböző magasságokban fennálló eme egyenlőtlen áthatóságot még külön is tekintetbe kell vennie.

Ebből a czélból a légkört két rétegbe gondolta osztva, egy alsóba, megfelelőleg a kisebb transzmissziós együtthatónak és egy felsőbe, melynek áthatósága nagyobb. Más szavakkal, LANGLEY ebbe a képletbe:

$$Q = \sum_{\lambda} A_\lambda p_\lambda^{\varepsilon}$$

két transzmissziós együtthatót vezetett be a hozzájuk tartozó légrétegekkel. Ezzel a korrekturával 3·505 gr. kalóriát talált a szoláris állandó értékeül. LANGLEY nyilvánvalóan elnézte, hogy az alsó állomás kisebb p_λ értéke nem kizárólag a két állomás közötti légrétegtől származik, hanem az alsó állomás fölött fekvő egészen a légkör határáig terjedő teljes légrétegtől.

A második korrekturát a következő módon találta: az alsó állomáson mért sugárzás és a belőle nyert transzmissziós

---

[1] LANGLEY: Report of Mount Whitney Expedition. 142. l. és köv. V. ö. Annals of the Smithsonian Institution. Vol. II. 119. l. és köv.

együttható segítségével kiszámította a magasabban fekvő állomásra a sugárzás intenzitását. Könnyen belátható, hogy az ily módon kiszámított sugárzásnak a megfigyeltnél kisebb értéket kellett szolgáltatnia, hiszen az alsóbb rétegek transzmissziós együtthatója kisebb mint a magasabb rétegeké. Langley ezt a körülményt hibának tekintette és ennélfogva a szoláris állandónak a felső állomáson megfigyelés által talált értékét javította a felső állomáson megmért intenzitásnak és a kiszámítottnak arányában. Ez a korrekczió 2·630 gr. kalóriát adott mint szoláris állandót. Az így korrigált két érték közepét aztán helyes értéknek vette. Így talált Langley 3·068 [kerek számban 3·0] gr. kalóriát a szoláris konstans értékeül. Tekintve Langley mindenkori pontosságát, igen meglepőnek kell találnunk a középérték képzés eme kissé durva módját, mely különben már korábban is feltűnt. Úgy látszik azonban, hogy Langley auktoritása elnémította az efféle aggályokat és így lett elfogadva általánosan a szoláris állandó 3 gr. kalóriányi értéke. Hibaforrás továbbá az is, hogy a Langley felhasználta Mountain Camp-i és Lone Pine-i mérések nem történtek egy és ugyanazon időben. Igaz, hogy Langley megkísérelte a mérések olyatén redukálását, hogy azok egyidejűeknek legyenek tekinthetők. Erre a czélra Langley a különböző hullámhosszak intenzitásait mint ordinátákat, a hullámhosszakat pedig mint abszczisszákat mérte fel; az így nyert görbe ábrázolta az energia eloszlását $\lambda = 0{\cdot}35\ \mu$-től $\lambda = 1{\cdot}2\ \mu$-ig, akkori mérései t. i. nem terjedtek messzebbre. Hazatértekor ezt a görbét kiegészítette $\lambda = 1{\cdot}2\ \mu$-től egészen $\lambda = 2{\cdot}8\ \mu$-ig. Ezen hullámhosszak intenzitásai t. i. nem mutattak semmiféle a légkör abszorpcziójától származó fogyást. Az előbb említett energiagörbék területeit azután egyenlőknek vette azon aktinométrikus eredményekkel, melyek ugyanolyan légköri állapotok és ugyanolyan napmagasságoknál észleltettek. Ily módon a görbék egyes ordinátái számára redukcziós faktorokat számított ki és az ekként nyert új ordinátákkal új görbéket szerkesztett, melyeket végleges értékeknek tekintett. «Ha el is kell ismernünk, mondja

Pernter, hogy a méréseket más módon alig lehetett volna egyidejűekké tenni, mégis nyilt kérdés marad az, hogy ez a redukczió elég pontosnak tekinthető-e. Különben Langley maga is ezt az egyidejűségre való redukálást oly röviden tárgyalja le, hogy szinte lehetetlen teljes betekintést nyernünk a részletekbe és a redukczió helyességébe».

A Langley elkövette hiba főképpen onnét származik, hogy ő a Bouguer-Puillet-féle formulát nem tartotta érvényesnek még egy határozott hullámhosszra sem, ha a levegő átbocsátó képessége a magassággal változik. Ez azonban nem helyes; a képlet egyszínű fényre majdnem teljes szigorúsággal érvényes, a mint a következő meggondolás mutatja.[1]

Képzeljük a légkört konczentrikus gömbhéjak által tetszőleges számú rétegre osztva akként, hogy minden egyes réteg ugyanazt a nyomásnövekedést eredményezi; jelöljük p-vel egy ily réteg transzmisszióját. Ez a transzmisszió rétegről-rétegre változik.[2]

A legfelsőbb réteg átbocsátja a

$$J_1 = J_0 p_1^{m_1}$$

intenzitást, a következő a:

$$J_2 = J_1 p_2^{m_2} = J_0 p_1^{m_1} p_2^{m_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

az n-dik réteg a:

$$J_n = J_0 p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$$

intenzitást.

Mivel a fénysugár a föld görbülete és a refrakczió következtében, melyek egymás ellenében működnek, mindenütt

---

[1] Annals of the Smithsonian Institution. Vol. II. 14. l.

[2] Washingtonban 1902 deczember havában tartott előadásában Langley maga bevallja, hogy a Bouguer-Pouillet-féle formula egyes hullámhosszakra jó sikerrel alkalmazható a megfigyelések redukcziójára. Ez alkalommal a szoláris állandó értékét 2·5 gr. kalóriának teszi. [V. ö. Astrophys. Journal, 1903 márczius.]

majdnem egyformán hajlik a függélyeshez, a míg csak a Nap állása nem túlságosan alacsony, úgy írhatjuk

$$J_n = J_0 (p_1 p_2 \ldots p_n)^m = J_0 p^m,$$

A p transzmissziónak változása a magassággal ennélfogva nem játszik szerepet. Ennélfogva teljesen kifogástalan a szoláris állandó meghatározásának az a módszere, mely egy és ugyanazon a helyen különböző zenittávolságoknál eszközölt két megfigyelés felhasználásán alapul. Igaz ugyan, hogy itt azt tételezzük fel, hogy a transzmisszió az egyes rétegben mindenütt ugyanaz és hogy a megfigyelés ideje alatt nem változik. Ez az utóbbi követelmény aligha lesz szigorúan kielégítve, mivel tényleg elég hosszú időközök szükségesek, hogy a Nap zenittávolsága tetemesebben változzék.

Very[1] kisérletet tett arra nézve, hogy Langley megfigyeléseit a légkörbeli diffuz visszaverődés Rayleigh-féle elméletével kombinálja. Több állandót vesz fel — látszólag önkényesen — és a szoláris konstans értékeül 3·1 gr. kalóriát nyer. Módszere azonban nem bír meggyőző erővel.

A szoláris állandó kiszámítására Pernter[2] a következő módszert ajánlotta: A sugárzás függését a légréteg vastagságától egy görbével ábrázoljuk; ha ez a függés egyértelmű volna, úgy mindig ugyanazt a görbét kellene nyernünk. A megfigyelés körülményei szerint azonban teljesen különböző görbéket kapunk, például mást ha völgyben, mást ha hegy tetején észleltünk. De mindezen görbéknek megvan az a tulajdonságuk, hogy a légkör felső határán, hol a rétegvastagság zérus, egy pontban metszik egymást; a sugárzásnak amaz értéke, mely ehhez a ponthoz tartozik, adja tehát a szoláris állandót. A görbéknek ezt a közös metszőpontját extrapoláczió útján kell meghatároznunk. Pernter ezt az eljárást Langley egyik dia-

[1] Very: Monthly Weather Review. Vol. 29. (1901) 362. l.

[2] Meteorol. Zeitschrift 6 (1886) 130. l. V. ö. Meteorol. Zeitschrift 46. (1907) 1. l.

grammjára alkalmazza, mely nagy művének 120. lapján található és a szoláris állandó legvalószínűbb értékeül 2·3 gr. kalóriát talál.

Scheiner[1] a Gorner Grat-on végzett méréseire a következő eljárást alkalmazta: A sugárzás megfigyelt értékeit minden fél napra grafikusan ábrázolja úgy, hogy a sugárzás értékeit ordinátáknak, a megfelelő légrétegvastagságokat abszczisszáknak veszi. Az ekként nyert görbéket azután extrapolálja és pedig részben egy tisztán analytikai eljárással, a mennyiben egy a légréteg vastagsága szerint haladó sort, majd pedig exponencziális függvényeket alkalmaz, részben pedig egy félig grafikus, félig numerikus eljárással.

Scheiner ezt az utóbbi eljárást a következőképpen tárgyalja: Az imént leírt módon nyert sugárzási görbékről veszszük az első differencziálhányadosokat a légrétegvastagságnak 0·4-nyi egyenlő intervallumaira és ezeket grafikusan egy egyszerű menetű görbével kiegyenlítjük. Eme legtöbbnyire csak gyenge görbületű görbének extrapoláczíója azután aránylag könnyen eszközölhető. A görbének extrapolált részéből veszszük ismét az első differencziálhányadosok értékeit és ezekből mechanikus quadratura segítségével meghatározzuk a zérus vastagságig terjedő sugárzási görbét. Ezen módszerrel 13 félnapból 2·02 gr. kalóriát talál a szoláris állandó értékeként. A hatványsorok útján eszközölt extrapoláczió 1·97 gr. kalóriát szolgáltat mint középértéket, míg az abszorpcziós formula segítségével véghezvitt extrapoláczió, azon feltétel alatt, hogy az extrapolált görbéket mind ugyanazon a ponton keresztül vezeti, középértéknek 1·945-t ad. További számításai alapjául azután a 2·02 és 1·97 értékeket veszi. Ezekre az értékekre még korrekcziókat alkalmaz és pedig a vízpárában (7%), a szénsavban (1%) és az ultraviola fényben (1·5%) való abszorpczióra. Ezeket a korrekcziókat számos laboratoriumi kisérletből vezeti le.

---

[1] Publikationen des astrophys. Observat. Potsdam. XVIII. Band.

Bemporad[1] erre az eljárásra a következő megjegyzéseket teszi: «Az ő [t. i. Scheiner] eljárása, néhány mellékkörülménytől eltekintve, tehát nem egyéb, mint a régi (klasszikus) eljárás ismétlése; azon eljárásé, melyet először Langley támadott meg oly jogosan a szelektiv abszorpczióról szóló elméletével. A régi elméletre később Rizzo és mások is ráczáfoltak új és súlyos érvekkel. Ezt a módszert röviden a következő szavakba foglalhatjuk össze, a melyek egyúttal elitélését is magukban foglalják: *bár nem tudjuk, hogy a levegő abszorpczióképessége miként változik a magassággal és hogy a sugarak összetétele minő változásokat szenved a légkörben megtett útjuk mentén, ez az eljárás mégis azt tételezi fel, hogy a sugárzás megmaradó intenzitása az átfutott légréteg határozott függvénye.* Ez a függvény empirikus ugyan, de azért mégis mindig teljesen határozott és ha egyszer ismeretes amaz intervallum értékének egy része számára, melyet független változónak vehetünk (pl. $\varepsilon=1$ és $\varepsilon=5$ között), akkor *mindig* meg fogja engedni az $\varepsilon=1$-től $\varepsilon=0$-ra való extrapoláicziót.

•Talán fölösleges külön kiemelnünk ezen okoskodás hibás voltát, mely nem annyira ama bizonytalanságban gyökerezik, melyben mindenféle extrapoláczió szenved, hanem inkább amaz ellentmondásban, mely e függvény túlságosan elemi képzésében rejlik. Scheiner itt két egymástól lényegesen különböző függvényt köt össze. Az egyik függvény megadja, hogy mily úton és módon változik a sugárzás intenzitása az átsugárzott légrétegekkel, mialatt a műszer egy határozott helyen mozdulatlanul marad; a másik, lényegesen különböző függvény pedig megadná azt a változást, mely előállana, ha a műszer mintegy fölemelkednék a levegőben, mialatt a Nap mozdulatlanul megmaradna a zenitben. Mindkét esetben változik a sugártól átfutott levegő tömege és a sugarak megmaradt intenzitása, de semmisem jogosít fel arra, hogy ezt a két függvényt egyetlen egybe foglaljuk össze, mint a hogy

[1] Mem. Soc. Spettroscopisti Italiani. Vol. XXXVII. (1908) 159. l. és köv.

Scheiner teszi. Ha már empirikus függvényekre vagyunk utalva, akkor a Scheinerénál sokkal előnyösebb Rizzo tanár eljárása, ki megvizsgálja, hogy miként változik a sugárzás a tengerszín feletti magassággal, mialatt a Nap a zenitben áll. Rizzo, ha fordul is extrapoláczióhoz, legalább megmarad egy és ugyanazon hipotetikus függvény körében, míg Scheiner két függvényt konfundál, melyek közül az egyik (az első) semmi összefüggésben sincs a légkörön túli sugárzással».

Bemporad[1] azután a következő módszert ajánlja: A spektrumnak egy igen kicsiny, úgyszólván monochromatikus részét megvizsgáljuk Langley-féle spektrobolométerrel vagy a mi sokkal egyszerűbb, Angström-féle pirheliométerrel, mely elé egyes határozott hosszúságú hullámokat átbocsátó szinszűrőt alkalmazunk. Miután ily módon a légkör szelektiv abszorpcziójának zavaró hatásait legalább nagy részben elimináltuk, az Angström tanártól Teneriffán követett eljárás példájára különböző magasságokban eszközölt lehetőleg számos méréssel meg kellene vizsgálnunk a légkör abszorpczióképességének törvényét legalább 4 vagy 5 km-nyi magasságig, s igy aztán az ekként talált törvény segitségével eléggé pontosan extrapolálhatnók a még hátralevő csekély magasságot a zérus rétegvastagságra.

A szoláris konstansnak az újabb időkben történt meghatározásai közül fölemlitendőnek tartom még a Hansky és a Stankewitsch-félét.

Hansky[2] a Mont Blanc csúcsán Crova-féle aktinométerrel észlelt, s a redukcziókhoz Crova képletét használta. Az így nyert eredmények középértéke Hansky szerint 2·9 gr. kal. Hansky azonban legvalószínűbb érték gyanánt az 1900 szeptember 4-én észlelt értékek közül a legnagyobbat, 3·29 gr. kalóriát fogad el, még pedig abból a kissé különös okból, mert — szerinte — a legnagyobb értékek a legvalószínűbbek. A szoláris konstansra nézve azt mondja: «Majdnem bizonyos,

---

[1] Mem. Soc. Spettroscopisti Italiani. Vol. XXXVII. 170. l. (1908). V. ö. Vol. XXXVIII. 76. l. és köv. (1909).

[2] Comptes Rendus. 140 (1903), 422. l.

hogy 3·0 és 3·5 gr. kalória között fekszik; minden esetre nagyobb 2·54 gr. kalóriánál, mely értéket legutóbb (1903) LANGLEY közölt».

Ezekhez megjegyezzük, hogy LANGLEY[1] ezt az értéket csak ideiglenesnek nevezi. A megfigyelések újabb kiszámítása 2·19 gr. kalóriát adott[2] ABBOT szerint LANGLEY ezen megfigyeléseiből 2·15 gr. kal. következik a soláris konstans értéke gyanánt,[3] még pedig azért, mert a műszer állandója nem volt egész helyesen meghatározva.

ABBOT újra redukálta HANSKY észleléseit, igen elfogadható föltevésekből indulva ki a Mont-Blanc-on uralkodó abszorpcziót illetőleg, a mely föltevéseket a Mount Wilson-on és a Mount Whitney-n végzett spektrobolométrikus megfigyelésekből vezetett le és úgy találja, hogy ekként a szoláris konstans értéke legfeljebb 2·22 gr. kalóriának adódik.[4]

STANKEWITSCH[5] 1900-ban Pamirban végzett sugárzás-méréseket különböző magasságokban az ANGSTRÖM-féle kompenzácziós pirheliométerrel. 3590 méternyi magasságban a szoláris konstanst 2·56 gr. kalóriának találta, 4220 m-nyi magasságban 2·74-nek, 4650 m-nyi magasságban pedig sokkal kisebb értéket, 2·01 gr. kalóriát talált. Azt hiszi, hogy a különbség oka a levegő porában keresendő, mivel időnként, egy igen heves déli szél porfelhőket kavart fel a hegynek már hótól mentes és száraz déli lejtőjén. A három észlelési állomás a megfigyelések idejében hóval volt borítva. A redukczióra az

$$J = Ap^{\frac{1}{\sin z}}$$

képletet használta.

Mindezekből eléggé kivilágik, hogy mennyire bizonytalan a szoláris konstans meghatározása *egyedül* az összsugárzás

---

[1] Astrophys. Journal. XVII. (1903), 97. l.
[2] Astrophys. Journal. XVIII. (1904), 315. l.
[3] Annals of the Smithsonian Institution. Vol. II. 123. l.
[4] Ugyanott.
[5] Comptes Rendus. 131 (1900), 879. l.

méréseiből, azaz a spektrobolométrikus mérésekből levezetett ismereteinknek tekintetbe vétele nélkül. [V. ö. ABBOT 124. l.] Ennek oka részben az, hogy mindeddig még nem eléggé ismerjük ama törvényt, mely szerint a légkör elnyelő képessége az összsugárzásra hat, részben pedig az, hogy az exakt pirheliométriában jelenleg még nem rendelkezünk egységes nemzetközi skálával. Ezért a különböző megfigyelőktől nyert értékek nem is hasonlíthatók össze egymással, mivel még azonkívül az észlelések helyre és időre nézve is nagyon különböznek. A földi légkör szelektiv abszorpcziója azonkívül szükségessé teszi, hogy az egyes hullámhosszak sugárzását vizsgáljuk meg.

A szoláris konstansnak a spektrobolométrikus módszerrel különböző magasságokban, Washington (tengerszín), Lone Pine (1100 m), Mount Wilson (1800 m) és Mountain Camp (3500 m) talált értékei oly jól egyeznek és a magassággal csak lényegtelenül változnak, úgy hogy az ezekből a mérésekből nyert középérték, 2·1 gr. kal. bizonyosan igen közel jár a valósághoz. Mivel pedig a spektrobolométrikus berendezés igen költséges és azonkívül két igen gyakorlott észlelőt igényel, ennélfogva csak örömmel üdvözölhetjük ANGSTRÖM és FOWLE jelzett módszerét, mely megengedi, hogy az összsugárzás méréseiből is elegendő pontossággal vezessük le a szoláris konstans értékét. A kalocsai mérésekből nyert végeredménynek a spektrobolométrikus értékekkel való meglepően jó egyezése eléggé igazolja a FOWLE-féle módszer alkalmazásának jogosultságát hasonló magasságú és hasonló páranyomási viszonyokkal biró helyeken. Ez az első kisérlet arra a reményre jogosít fel bennünket, hogy képesek leszünk eléggé kimerítő és pontos ismeretekre szert tenni a légkörnek Magyarország, különösen az Alföld felett elterülő rétegének átbocsátási viszonyait illetőleg, ha majd terjedelmesebb észlelési anyag áll rendelkezésünkre, s ha a szoláris konstansnak a spektrobolométrikus mérésekből levezetett 2·1 gr. kalóriányi értékét veszszük alapul. Azok a szép és fölötte érdekes következtetések, melyeket dr. ANDERKÓ AURÉL úr a talajhőmérsékletet illető vizsgálataiból[1] tudott levonni, eléggé mutatják, hogy a sugárzás pontos ismerete mennyire fontos a mezőgazdaság szempontjából is és hogy ekként a meteorológia mily nagy hasznára lehet a raczionális talajművelésnek. Ezért fölötte kivánatos lenne, ha különösen Magyarországon minél számosabb és kiterjedtebb sugárzásmérés eszközöltetnék.

V. A Nap hőmérsékletének meghatározása.

Az a kérdés merül most fel, hogy a szoláris konstans talált értékének a Nap mekkora hőmérséklete felel meg. Hogy erre a kérdésre pontos és határozott feleletet adhassunk, teljes pontossággal kellene ismernünk a Nap összetételét, különösen a felületén, tudnunk kellene, hogy ott mily anyagok mily állapotban vannak jelen. Minderről azonban igen keveset tudunk, semmiesetre sem annyit, hogy a feltett kérdésre pontos feleletet adhatnánk. Egyébiránt szó sem lehet a Nap valamely egységes hőmérsékletéről, mivel a Nap, a ma leginkább elfogadott nézet szerint, egy befelé mindinkább sűrűsödő gázgömb. Annyi bizonyos, hogy a külső rétegek hőmérsékletének alacsonyabbnak kell lennie a belsőkénél és pedig azért, mert a külső rétegek hőt sugároznak ki a világürbe.

Következtetéseket a Nap hőmérsékletére egyesegyedül a hozzánk érkező sugárzás természetéből vonhatunk. Ennélfogva a «*Nap hőmérséklete*» kifejezés alatt ama réteg hőmérsékletét kell értenünk, melyből a hősugárzás kiindul, t. i. a fotoszféra hőmérsékletét. Azonban a különböző testek emisszióképessége különböző s változik még azonfelül a hőmérséklettel is. Azért a Nap hőmérsékletét csak akkor határozhatjuk meg pontosan, ha pontosan tudjuk, hogy a fotoszférában mily anyagok vagy mily vegyületek sugároznak és ha pontosan ismerjük ezek emisszióképességét. Jelenleg csak az abszolut fekete test sugár-

---

[1] ANDERKÓ: A talaj melegének periodusos ingása. — Math. és Phys. Lapok. XVIII. (1909), 257. l.

zási törvényét ismerjük pontosan. Ennélfogva elsőben is meg kell szorítanunk a problémát, abból a feltevésből indulván ki, hogy a Nap ép úgy sugárzik, mint egy abszolut fekete test. Az ily módon meghatározott hőmérsékletet a Nap *«effektiv hőmérsékletének»* nevezzük. Ez alatt tehát azt a hőmérsékletet kell érteni, melylyel egy abszolut fekete test birna, melynek ugyanolyanok a méretei és ugyanaz a sugárzási hatása mint, a Napé.

Mint ismeretes, az összsugárzás összefüggését a hőmérséklettel az egyszerű Stefan-féle[1] törvény szabja meg, mely szerint a sugárzás (W) arányos a hőmérséklet (T) negyedik hatványával, minek fölötte egyszerű kifejezése a következő képlet:

$$W = \sigma T^4, \quad \text{vagy} \quad T = \sqrt[4]{\frac{W}{\sigma}}.$$

Ha a Nap effektiv hőmérsékletét a Stefan-féle törvény alapján akarjuk kiszámítani, két különböző képletet használhatunk, melyek csak lényegtelenül eltérő eredményeket szolgáltatnak, t. i.:

$$Q = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T^4}{4\pi R_2^2}, \quad \text{miből} \quad T = \sqrt[4]{\frac{Q R_2^2}{\sigma R_1^2}},$$

hol:

Q = a szoláris konstans .... 2·05 gr. kal.
R_1 = a Nap sugara .... 695 508 km.
R_2 = a Nap közepes távolsága a földtől ... 149 480 000 km.
σ = a Stefan-féle törvény állandója Kurlbaum szerint:

$$76{\cdot}8 \,.\, 10^{-12} \text{ gr. kal. } \frac{\text{cm}^2}{\text{min.}}.$$

Ezen képlet segitségével nyerjük a Nap effektiv hőmérsékletét

$$T = 5926^\circ \text{ [abszolut hőfokokban]}.$$

Warburg[2] a következő képletet állította fel:

---

[1] Winkelmann: Handbuch der Physik. II. 2. 247. l. Drud. Ann. 1. 115; (1900). [Planck, Theoretische Herleitung des Stefanschen Gesetzes.]

[2] Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellschaft. I. Nr. 2.

$$T = 273 \sqrt[4]{\frac{2{\cdot}483}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{S}{h}},$$

hol

$$S = \frac{2{\cdot}05}{60} = 0{\cdot}034166 \text{ gr. kal.} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}},$$

$$h = 0{\cdot}0176 \frac{\text{gr. kal.}}{\text{sec}} \text{ Kurlbaum szerint,}$$

$$\varphi = 31'59''.26 = \text{a Nap sugara.}$$

Ebből a Nap effektiv hőmérséklete gyanánt adódik:

$$T = 5930^\circ \text{ [abszolut hőfokokban].}$$

Ezzel az effektiv hőmérséklettel kell számolnunk, ha a Napnak kifelé való hatásáról van szó.

Mivel a hőmérséklet a sugárzásnak aránylag magas hatványával változik, ennélfogva a szoláris konstans értékében való nagyobb határozatlanság sem okoz nagy különbséget a hőmérséklet meghatározásában. Így például ha a szoláris konstansnak két szélső értékével számolunk, t. i. 1·76 Pouillet szerint és 4·0 Angström szerint, a Stefan-féle törvény 5600°, illetve 7010° Celsiust ad a Nap effektiv hőmérséklete gyanánt. Ez által a régebbi 1500° és 10 000 000° közti ingadozás, melynek oka a hibás sugárzási törvényekben volt és a mely a naphőmérséklet meghatározásának problémáját annyira diszkreditálta, most már aránylag igen csekély intervallumra redukálódott.

Oly vizsgálatoknál, melyek magának a Napnak fizikáját czélozzák, nem elégséges az *effektiv* hőmérséklet ismerete; ezeknél a fotoszféra tényleges hőmérsékletével kell számolnunk. Ezért az asztrofizikusoknak régtől fogva az volt a törekvésük, hogy a Nap tényleges hőmérsékletét meghatározzák. Ezen probléma megoldása elé azonban még ma is igen nagy nehézségek gördülnek. A teljesség kedvéért a következőkben e kérdéssel is röviden foglalkozunk.

Világos, hogy a Nap tényleges hőmérséklete magasabb az effektivnél. Mert az abszolute fekete test hőmérséklete más, egyenlő sugárzáshatással biró testek hőmérsékletével szemben, minimális hőmérséklet. Továbbá a fotoszférából kiinduló sugárzásnak át kell hatolnia a fölötte elterülő chromoszférán, melyben részben elnyeletik.

A legáltalánosabban elfogadott nézet szerint a fotoszféra tulajdonkép egy magas hőmérsékletű felhőréteg, mely a gázszerű napgömb fölött lebeg. Ezt a felhőréteget kell tekintenünk ama helynek, melyből a napsugárzás legnagyobb része valóságban kiindul. Ezt a felhőréteget valamely elem kondenzácziója létesíti ama magasságban, hol a kifelé csökkenő hőmérséklet a főleg hidrogénből álló atmoszféra túltelítettségét vonja maga után. A sugárzás gázrétegben lebegő szilárd vagy cseppfolyós részecskékből indul ki főleg és ennélfogva megfelel oly világitó láng sugárzásának, melynél a lángban lebegő szénrészecskék szolgáltatják a sugárzás főrészét. Hogy mekkora a fotoszféra sűrűsége és vastagsága, arról jelenleg ugyan még nincsenek biztos ismereteink. De nem valószínűtlen, hogy a fotoszféra sűrűsége és vastagsága oly nagy, hogy sugárzása megfelel egy végtelenül vastag réteg, vagyis körülbelül az abszolute fekete test sugárzásának. A felhőréteg sugárzásához hozzájárul még az alatta lévő nagyobb mértékben sűrített gázok sugárzása, úgy hogy tekintettel a Nap gáznemű alkatára a számításba veendő összréteg elégségesnek tekinthető arra, hogy a fekete testével közel egyenlő sugárzást hozzon létre.

Van néhány modern kutató, kik a fotoszférát nem tekintik valóban létezőnek. Szerintük a fotoszféra csak látszólagosan keletkezik a Nap belseje felé mindinkább sűrűsödő gázokban fellépő sugártörés által. Az összefüggő spektrum tehát az erősen sűrített gázoknak tulajdonitandó a fotoszférában és a felette végbemenő tünemények pedig rendellenes (anormális) sugártörésben és anomál diszperzióban lelik magyarázatukat. Ezen kutatók nézete szerint a sugárzás oly gázoktól származik, melyeknek vastagsága praktikusan végtelen nagynak tekinthető, úgy hogy a sugárzás ebben az esetben is a *fekete* testével egyenlő.

A mi problémánkra nézve teljesen közömbös, hogy melyik hipotézishez csatlakozunk; a sugárzás, ha akár valóságos, akár látszólagos fotoszférából indul ki, mindkét esetben közel olyan, mint a fekete test sugárzása. De mindkét esetben a sugárzás nem lehet teljesen határozott, mivel különböző mélységű rétegekből indul ki, melyeknek hőmérséklete szükségszerűen különböző.

Ennélfogva a fotoszférából kiinduló sugárzást úgy kell tekintenünk, hogy az különböző hőmérsékletű fekete sugárzások szakadatlan egymásfölé helyezkedéséből ered. Ennélfogva a hozzátartozó energiagörbe sohasem egyezhetik teljesen azon energiagörbével, mely a Planck-féle egyenlet szerint egy határozott hőmérsékletnek felel meg. Scheiner szerint ebből lehetne részben megmagyarázni azt a körülményt, hogy a Nap sugárzásának maximuma jobban fekszik a nagyobb hullámhosszak felé, semmint az effektiv hőmérsékletből várni lehetne. Az energia-maximum helyzetéből levezetett hőmérséklet tehát mindig túlkicsiny lesz.

Hasonló értelemben, bár sokkal kisebb mértékben hat a napatmoszféra *szelektiv* abszorpcziója. Ezt az utóbbi befolyást valahogyan lehet még megközelítőleg számításba venni, míg az előbbi körülmény lehetetlenné tesz minden föltevést, mivel semmit sem tudunk arról a mélységről, melyből a sugárzás kiindul, sem azokról a hőmérsékletkülönbségekről, melyek a fotoszférán belül uralkodnak. Ennélfogva teljesen ismeretlen előttünk, hogy ezáltal az összsugárzásból meghatározott effektiv naphőmérséklet miképen változik. Következőleg nem tehetünk egyebet, mint hogy a közvetlenül a fotoszférából kiinduló sugárzást egyenlőnek tekintjük, egy a fotoszféra középhőmérsékletével biró fekete test hőmérsékletével. Ez is minimális hőmérséklet. Ez a sugárzás azonban semmiképen sem azonos azzal, mely a földi légkör felső határához érkezik, mivel előbb át kell hatolnia a Nap atmoszféráján, mialatt erős változásokat szenved. A Napot körülvevő atmoszféra és felsőréteg erősen abszorbeáló hatással van a sugárzásra s ez az abszorpczió azonfelül erősen szelektiv. A Nap peremén a violaszínű sugarak abszorpcziója sokkal nagyobb, mint a vörös sugaraké.

Ez az abszorpczió eredményezi, hogy a Nap korongja a szélei felé sötétebbnek látszik.

Azokból a vizsgálatokból, melyeket eddig a Nap abszorbeáló rétegének átbocsátási képességére nézve megejtettek, az optikai sugarak különböző hosszúságú hullámai számára a következő transzmissziós együtthatókat lehet levezetni:[1]

λ	Transzmissziós együttható
0·9 μ	0·97
0·8	0·88
0·7	0·79
0·6	0·70
0·5	0·62
0·4	0·53
0·3	0·44

Ezen réteg átlátszósága tehát a viola felé erősen fogy. A középtranszmissziós együttható ebből 0·70. Ez az érték igen jól egyezik azzal a transzmissziós együtthatóval, melyet Frost[2] direkt termikus méréseiből, tehát az összsugárzás méréseiből lehet levezetni. Frost t. i. a középtranszmissziós együtthatót 0·72-nek találja. Ha a Nap körül nem lenne abszorbeáló réteg, a sugárzás mindenütt egyenletes lévén, az összes sugárzott hő lenne:

$$J\pi R^2 = \pi = 3{\cdot}14,$$

ha a Nap sugarát R-t hosszegységnek és a középpontban létező intenzitást egységnek veszszük. Ha azonban a Nap korongját konczentrikus zónákra osztjuk, melyek szélessége $0{\cdot}05R$ és megszorozzuk minden zóna területét a közvetlenül

[1] Poggend. Annal. Band 48. — Sitzungsber. der K. Bayer. Akad. d. Wissenschaften. Band 21.

[2] Astron. Nachrichten. Band 130 (3105).

megfigyelt intenzitással és az így nyert szorzatokat összegezzük, csak 2·56-ot találunk. Ennélfogva abszorbeáló réteg nélkül a sugárzás

$$\frac{3\cdot14}{2\cdot56}\cdot\frac{1}{0\cdot72}=1\cdot70\text{-szer}$$

nagyobb lenne a megfigyeltnél. Míg a mi sugárzási méréseinkből a szoláris konstans értékeként 2·05 gr. kalória következik, addig abszorbeáló napréteg nélkül 3·49 gr. kalóriának kellene adódnia. Ebből az értékből, a fentebbi két képlet segítségével, a fotoszféra effektiv hőmérséklete gyanánt

$$T=6769^\circ \text{ C-t, illetve } T=6772^\circ \text{ C-t}$$

találunk.

Mint már a bevezetésben megjegyeztük, a szoláris állandónak és a Nap hőmérsékletének meghatározása egész az utolsó időkig az asztrofizika legkevésbé kielégítő problémája gyanánt szerepelt. Sőt sokan épenséggel mint a *nem-exakt* kutatás példáját állították oda. Előbbi megfontolások alapján mondhatjuk, hogy e vélemény nem állja meg többé helyét; sőt inkább joggal remélhetjük, hogy e fölötte nehéz probléma kielégítő megoldásához igen közel állunk.

BOLYAI FARKAS ZENÉSZETI DOLGOZATA.[1]

Mu'sika (zenészet) a' szív szószóllója — a' belső világ' nyelve, a' hol a' kűlsőnek minden nemzeti szó-tárjai elfogynak —, 's ez egyedül minden nemzet' érzékeny lelkeinek köznyelve.

Az Isten' szine előtt égő kerubim se talál szót, — angyal-raj repes a' minden napok napja sugárzatán — 's a menny zengeni iratik. — A' hajnal' kapujához emelkedő pacsirta' vidám trillái, 's az éjj' lantossa édes szomoru dala is azonegy harmonia részletes ki ömlései.

Olyan érzések is vannak, melyekre a' nyelv elnémúl: a' hálának égre jövö harmatja szótlan, titkos kútfejét keresi — 's a' bú' tengerébe sűlyedő szív némán a túlsó part felé vér — 's némely belső idö-változásra minden legrégibb sebeink, a' bár sok évek' egymásoni kötöje alatt is sajognak; mintha a' temetönek minden alvója álmában fel-nyögne: az elnémultnak a' szószólló ád szót, mellyel a mély jajjak is ki menjenek.

'S néha a' belső æol-lant, mintegy mennyei zefirre rezdül-meg; s édes nyugtalanságunknak sem nevet, sem szót adni nem tudunk: mely kedvesen érkezik az a mu'sika, mely a' meg születni nem tudo csecsemőt köteleiből fel oldva elé hozza.

Hát a' midőn a' más' fájdalmától vérző érzékeny, megfosztattva a' segí-

---

[1] Ez Bolyai Farkasnak ifjabbkori müve, egyik előadásának kidolgozása, melyet Koncz József A marosvásárhelyi evang. kollegium története cz. művének 300. oldalán Bolyai Farkas hiányzó művei között említ fel. Koncz idézett művének egy kézi példányába, mely a marosvásárhelyi ref. kollegium könyvtárának birtokában van, később bejegyezte, hogy «megvan». A kéziratot a kollegium könyvtárában végzett kutatása alkalmával a B. F. emléktárgyait tartalmazó ládában Rados Ignácz találta meg és ajánlotta a kollegium könyvtárőrének, hogy azt alkalmas helyen változatlanul hozza nyilvánosságra. A müvet tartalmazó füzet felírása: «Bolyai Farkas zenészeti dolgozata eredeti kézirat».

tés módjától, csak kősziklákat ekhoztat —; vagy a' kinyilo sziv csak azt mutatja, hová löjjön a' legsérthetőbb érzéketlennek fel vontan állo íve —; vagy a' szeretet' arany aratását jég lepi el, vagy a' ki barátja sirján az érzés nélkűl szollo kő mellett a le 's fel intő pásintra néma érzéssel harmatoz — micsoda külső szóknak van kulcsa az ily belsők szentekszentibe?

Az igaz mu'sika hathat bé ide, mely a' léleknek azon eredeti húrjait ébreszti fel, melyek a' mennyeikkel egybe zendűlnek — mintha leszállo boldog sergek repesnének a' puszta felett — 's angyal sugná, hogy ott van a' mit itt hiába keresünk — ott az igaz hon — 's az Isten — 's minden elhunyt kedvesseink. — 'S oh ha a' kültermészetben kölcsönös a' vonzó erö, miért ne hinnök, hogy vannak, a' midőn vonzódunk hozzájok?

Szent hon-vágy! ha a Helvétet néhány pásztori hang a' siralmas földre is úgy fel indítja, hogy más helyt meg nem nyugszik: mennyivel inkább feltámad a' fagylalo zivatarok között mezitelen verő szívben az eredeti Hon' nap-melege' ohajtása, egy oda való zengzetre! Külön válik a' belsö ember — meg tágulnak bilincsei — 's mintha tömlöcze ajtaja nyílnék, 's viradna; a' bel-világ hajnala' gyöngyei indulnak a' rokon lelkek eleibe — 's fel-oldódo szárnyak repesnek feléjek.

Azt mondják, hogy az új *Orpheus (Paganini)* mu'sikájára két ellenség ölelkezett egybe: mikor jön az a Paganini el, hogy mindnyájan a' helyett, hogy egymásnak megkeseritsük az életet, egybe ölelkezzünk; 's a' mindennek minden elleni hada megszűnjön —: ezen mu'sika dicsősége még csak a' halotti harangé, csak hogy nem azokat békélteti meg, a' kik hallják.

Mindazáltal a mu'sika is, mint a' beszéd oly különböző: mennybe emel, vagy vétekre csábit — a' vér-mezőre le szállott Jupiter dörgései 's villámjai közé ragad, vagy nagyobb veszedelemmel a' Delila ölébe altat el. Csak arrol a' mu'sikáról van szo, mely a' lelket nemesiti: a' földet elvesztettnek mennyet ad, a' csüggedönek bátorságot 's az eltévelyedönek az örökkévalóságba mutato bel-magnest megeleveníti.

Oh Ifjak! kiknek a' hév ég-hajlat alatt kell általmennetek —, hol a természet a' maga oriási nagyságában áll az égtől a' földig le, mind bájjaival, mind szörnyetegeivel —: fegyverkezzetek mindennel fel, a' mi valamely pillanatban meg-menthet; kicsin áll-meg sokszor a' nagy erény —; egy az igen megnyílt szívbe hatott tekintetre, úgy tetszik, hogy az addigi éjj' gyúlado szélén, ró'sák' mosolyja 's brilliántok' fénye közt jön fel az arany-idő napja —; 's az okosságnak minden kiméréssel épült jégvára le olvad, 's a' királyné egyedűl védetlen maradva, a' féketlen indúlattal nem bír —. Jusson eszetekbe, mikor a' legfelsőbb égbe érzitek magatokat, hogy éjji álom-járók a' leg-szörnyebb örvény' szélén jártok —. Ha az angyalok is elestek, 's még oly vétek-is van, melynek a' lelkek is kitétettek (a' ki-tűnés): hány ellenséggel kell nékünk nyomorult halaandókul a' vég-pillanatig híven harczolni, hogy el nyerjük az élet koronáját.

Két véd-angyal, az *okos munkásság* 's a' *mindenben mértékletesség* senkitől, különösen tőletek el ne maradjon! — 's vegyétek még harmadik úti-társul a' Mu'sika mu'sáját! Változók az órák, 's a' hajdani Sátán minden ürességet les, melyen az erény' édenébe pokoli burján' magvait hintse: az egyik úti társ a' munkásság néha ki fárad, 's a' tisztább léleknek is napfogyatkozása van, 's a' setétben, bolyongo tüzek 's kisértetek indulnak meg; néha az egymást által meg által vágó kivánságok, mint a' Vezuv benn nem férő tüzei feszítik a mellet —; vagy egy part nélküli Oceant hánynak a' szélvészek —. Oh! mely közel van ilykor a' veszedelem — kivált ha a' hiv barát is távol van. Hivjátok ekkor a' harmadik úti társat: hogy a' napot ujra hozza vissza — a' dühösködö szelek zefírekké szelidüljenek, 's a' hullámzo mélység mutatva az eget a' főld tikkasztó gőziből tisztább lélekzésre emelkedjetek.

Qui saxa cantu movit et domuit feras,
Hebrique tenuit impetum dulci mora.

Sőt mivel az érzések között legnemesebb társa a' hallásnak a' látás, ide tartoznék a' rajz is, mely több élet-módra is szükséges: de a' mu'sikán nem a' tánez cinczogtatás értetik, sem a' compositio, (mely a' legritkább talentum) 's a' rajzon sem a szineken kezdődő, mely mint a' mindent megszinező perspectiván néző poézis, csak különböző festékekbe mártott ecset' mive lesz —; hanem mindenikben az ifjúságnak annyi alapos kiképződése legyen, hogy a' kinek módja lesz, többre vihesse, 's 'a kit a' természet híva, követhesse. Sőt mivel *Musae junctis manibus pinguntur*, jó volna egy oly átalános ki mutatása a' kimivelődés ég-tájainak, hogy mindenki saját irányát kapná meg; hogy minden kerék 's szeg a' gépben a' maga helyén legyen, a' helyett hogy Pegazus szántani állíttatván, 's a' hasznosabb igavono Hypokrénéből itattatván, mindenik elveszszen.

Csak gondolja meg az ifju, mely kicsi az élet egész dividendussa, 's a' divisort a' lehetségig 1-ig apaszsza, hogy a' quotus nőjjön: ha kétfélét oltanak a' fába, a' termés' summája nem két fél hanem két fertály — 's egy tőn a' kettő fél annyit 's betegen él —; másfelől a dividendusnak nagy részét tevén az idő, ezzel szokjék jól gazdálkodni; mert pénzt adhat más, időt csak elvehet, 's rendszerint a' kiknek igen sok van, veszik el attol, a' kinek igen kevés van, 's az idő tolvajokról nem szoll a' törvény. Nemzet' kimívelődése fokozatát mutatja az idő becse: mikor felsőbb tárgy helyett a' kalendáriomi név-napokat keresték, mennyi fontos kötelesség' ideje vesztegetődött-el —; alig egyéb haszonnal, mint azzal, hogy a' színlett jó kívánságbol is valami tér vissza béfelé is, 's a' társaságban is a' legrosszabb-is jónak kivánván látszani, ebből is maradhat valami.

Okos idő kiméléssel 's jól kimértt munkássággal bé lehetne tölteni a' földi kört: de különben midőn a' tan óriásilag nő, 's mi maradékról maradékra pújulunk, erő és idő bánkrottan esünk vissza. Nagyot segitene, ha a' rég ohajtott, akár mathesisi 's mu'sikai lélekkel készült, akár a' meglévők közűl valamelyik kőznyelvvé lenne; melyen egyedűl legyen minden nyomtatás, 's a' melyre minden méltó fordíttassék le: úgy azután senkinek se kellene két nyelvnél többet tanulni; egyik az otthoni házi nyelv volna, 's a' másik a' mellyen minden nemzet beszélhetne együtt —. De a' bábel tornya kisebb világba se tudott megkészűlni —; vannak olyan mivek, melyeket sokan nem tehetnek meg; példa egy tőbe cérnát húzni.

Még van egy, a' mi kőnnyítene: ha annyi Professornak való volna, hogy a' legjobbak közül bár több falunak jutna egy, a' ki segédek által úgy építene, hogy a' további építésre ne kelljen elébb lerontani az előbbit, 's a' ki jövendőbe mutató lát-csővel ki nézné a nagyobbra termetteket, 's a' szerint fejtve feljebb ajánlaná. De megelőzi ezt egy más oskola, melyben a' senki más által ki nem pótolható első az Anya: neki kell a' kis csemetét épen nevelni, melybe az Apa, vagy helyettes tanító Atya nemes ággal oltson meg —; annak a' nemzetnek lesznek derék férfiai, a' hol derék Anyák vannak, tisztelet a' jó Anyáknak! Ők egyengetik az utat, melyen az Isten országát várjuk. Engedelmes jó gyermekek' Anyja királyné a' házába, láttatlan angyal tartja a' koszorut felette. Oh! de ez megint egy felsőbb oskolát kíván, hol a' jó Anyák nevekedjenek.

Mindazáltal, ha mindent el várunk, semmit se teszünk: úgy, a' mint vagyunk, tegyünk annyit, a' mennyit lehet, 's a' mit várnánk is hamarébb el jön. 'S alkalmazva a mu'sikára is, hogy a, most járatlan gyep úttá váljon, meg kell rajta indulni; kezdjék el bár kevesen a' kiknek módjuk van, többen követik; csak a 13 éven feljűl hegedűt kezdő ne várjon többet az egyedűl magának 's a' másokkal együtti játszhatásnál.

De ez-is egyik nagy haszna a' mu'sikának: szoktatja a' lelket a' különbözők egyeztetésére, és arra, hogy mindenik a' maga részit nem külön kitűnésére, hanem az egész tökéllyére teljesítse. A' le vetett Sátán gyujtotta a' feljűl-vágyás pokoli tüzét az emberi mellbe: a' ki ön-nyugalmát s felebarátait szeretni kívánja, ovódjék ettől a' társaság' mérgétől; ha mindennek fájni kezdene, hogy ő nem legnagyobb, mindenik a' többit leverni törekedvén, hogy ő feljűl legyen; a' rend az ég' áldott leánya elhagyná a' poklokhoz számitott bujdosót. Nagy egyedül az Isten, s' a' ki a Gondviselés cirkalmától eleibe írtt körben nyugodttan munkás; 's valaki túl megyen, *amittit proprium, qui alienum appetit*; leg kisebb pedig a' kevély; minél nagyobb valaki, annál inkább látja kicsinységét, 's mely könnyen eshetik alább a sokkal kisebbnél is —; de megvetést még a' kevély sem érdemel, mivel ha több esze volna, nem volna az, 's mihelyt több lesz, nem lesz az.

Azonban minden véghetlen nagy lefelé nézve, 's véghetlen kicsi felfelé nézve: sok burján mondhatná a' rosát bámúlónak «ha tudnád, micsoda jótékony erő van bennem, nem vetnél meg» 's egy méh 's több féreg olyant tud tenni, a' mit Newton nem — ; a' föld (egy a' nap körűl keringő esti lepke) nagy egy dominiumhoz képpest; 's a' világok' millijóit éltető nap, egy kisebb rangú gyertya a' nagy oltáron.

Csak-ugyan a' nagyságnak is ha jelen-köre' szélére ért, a' nyílo cirkalom továbbit mutat — 's az egymáshoz illők' egyesülése meghaladja a' summát; a' nyárfához fogodzott szőllő-tő annak magasságát nyeri meg, 's a' nyárfáról gerezdek nevetnek alá —. De nem az a' hágás' módja, hogy az első lajtorja-fogrol elszökve a' többit azonnal az égre nézzünk — : mint a' ki alig tanult meg írni, 's író akar lenni — *Occupet extremum scabies*, pedig egy-két ember nézi tél-túl meg, 's többnyire csak egy kis eledelt keresni a' felebarátot rágo nyűnek (egy nagy insectum-faj, melyről nem az állattan, hanem az emberek históriaja szoll); egyébaránt is csak a' feledés' holt-tengere nevelése, melyből a' nép' változó szele hány valamely hullámot a' nap-fényre.

Olvasson az ifjú jót és jól — gyűjtsön materiát az építés előtt: 's ha valamely csirát veszen észre magában, jól nézze meg, mi az, 's ha burján, tépje ki, ha tölgy, nevelje épűletre, ha gyümölcs, oltsa nemes ággal meg — ; írjon is, mikor ideje eljön, ha a' természet hívja reá — de elsőre azután nézze meg, van-é valami új benne, vagy a' matériára, vagy a' rendre, könnyítésre, tisztaságra, ideák' meghatározására, szigorubb okmutatásra, vagy talán a szépségre nézve: különben ritkább ember lesz, ha ezen sír-iratot nyerheti: «*Itt nyugszik egy a' ki olvasni 's irni megtanulva is, könyvet nem írt*».

Legkísértőbb a' Poézis azokra nézve, kik a' tudományt megvetik ezen olcsobb koszoruért: Poéta kevés lesz 's kevés is kell — ; 's még-is ez a' szegény Musa szenved legtöbb erőszakot 's szűl legtöbb nyomorékot, 's pegazusi szárnnyal az ökör se szánt többé — 's a' poéta is éhen hal meg. Az igaz Poéta megbíro szárnyakkal emel fel a' föld sárja felibe — *si paullum a summo discessit, vergit ad imum.* Horat.

De a' kik valóban tanulnak-is, ritkán nézik csak azt, hol használhatnak bár kevesebb fénnyel legtöbbet: ritka, a' ki egy faluba oskolamesternek menne, ha szintén volna is miből élni ott — a' mely egyedűl helyes ok, 's boldogabb időkre vár —; 's jó fizetés mellett-is marad még egy ok: Éva nélkül puszta volt a' paradicsom, bár vele elveszett is —; 's melyik az, a' ki mesternének menne? A' nagyravágyás, mely Kaintol fogva testvér-vérrel festette a' föld anyai melljét, a' női gyöngéd szívek' boltozatai alá is bélopodzik: de le csendesednek valaha a' köz égés' szélvészei; 's megértik az emberek, hogy mint egy synphoniában mindenkinek a' maga részét jól jádzodni legjobb; hogy harmonia köszöntse a' külön-gyertyák éjjére feljövő napot.

*

Nagy kérdés, hogy mi okozza a' mu'sikának esmértt hatását? Leibnitz azt mondotta, hogy *az Arithmetikának a' lélek' öntudata nélküli titkos gyakorlata.* Tudtával igaz hogy (a' krajtzuri körön kivül) ritka gyakorolja örömest, lopni kell belé. De másfelől igaz, hogy a' zen szám, mint a' szín, bizonyos időbeni rezgés-számok csak különbözőkben, úgy hogy a' zen mintegy *fűl-szin,* 's a szín, *szem-zen:* az *a* nevű zen a' húrnak mintegy 429 rezgése 1″ alatt, 's a' viola-szín az úgy nevezett étherbe billiokra menö(hullámnak nevezett) rezgés.

A' zene kettős sora bizonyos rendű zeneknek; az egyik id-sor, a' mennyiben mindenik bizonyos ideig tart, 's a' másik űri, a mennyiben a' rezgések űrben esnek; tehát a' minden kűli 's beli érzeteink eredeti két helyjeinek az idnek és űrnek ki mért renddeli egyesűlete: de ez egy gépben is lehet a' mu'sika hatása nélkűl.

A' lélek élete munkálodás: az ürességet unva, az igen könnyűvel nem telik bé, de az igen neheztől is a' mit nem vagy alig bír, undorodik; sőt a' mit szeret-is, ha igen sok együtt, unja; egy regényes vídékbeni szép zenéhez igen sok a' nap, annnyival inkább, hogy ha több szépet világít — kedvesebb a' hold, mely a' fántáziának játékot enged, hogy minden mozduló árnyat liget nymfáivá elevenítsen.

Fő munkálatai pedig a' léleknek: kifelé a' hasonlítás, elvétel 's öszvetétel; béfelé az irány nézése,' s a'-szerinti akarat. A' hasonlítás leányi, a különbözők' egyesítése, 's az egynek különbözőítése; melyekből jön, a' távoliak' közelhozása, 's a' közeliek' eltávítása.

Az elvettek' öszvetételéből lesz, a' másod rangu kis teremtés' gyermekjátéka: örvend valami célra tett jó szerkezetnek; de ha az eredeti szépből, mely-is azon külső és belső természet, melyben az Isten megjelent, jól másol valamit, vagy megért valamit, más érzéssel *szép* nevet ád neki —; noha a' természetben is sok nézti szép vagy rút van, valamely azzal öszve kötött gyönyörért vagy fájdalomért —; a' szerecsen Venussa fekete 's az ördöge fehér — ámbár nálunk is van kisértö ördög fehér.

A' béfelé nézéssel látott irányból származó akaratra megnyílik az út, melyen a' mulattato vídékeket rémitő sívatagok 's borzasztó mélységek váltják fel — de minden elmarado szépségek feletti a' vészteljes fergetegre sütő lámpája az örökkévaloságnak — meg mutatva a' parányi egész földi időnek kinyujtott két végin azon véghetlen sort, melynek mindenik íze egy halál általi felsőbb élet — minden évek' vége kezdete a következőnek, hátra siro 's elé öröm-könnyező ábrázattal —1-ső keresztelés itt az elötti életbeni temetés, 's az itti temetés tul keresztelés. A' bel nap' sugara lelkesítve testesül, 's a' kettős lény kútfejéhez vissza vonódik, 's minden lét-alakbol az abban készült azon léti érzékeken feljüli finomat szabadítja ki a' halál —; mely végnélkül folyván mind közeledünk Istenhez, 's egymástol mindig különmaradva, sohasem érkezünk meg; a' lélek pedig nemcsak ezen a' véghetlen úton tökélyesül mindig, hanem még itt is, az el aggottban is nagyobb mint volt, csak az új évigi szolgák hagyják-el.

Ezen nagy útról, melyrol nincs Reisebeschreibung, vissza térve a' tárgyra: a' látás' körébe inkább az időbeni kül-világ, a' hallásába tartozik a' bel-világ: az időbeni útban is új meg újabb vidékek sora van; hegyek, lejtők, lapályok 's a t. mint a' mu'sikában hágás, szállás, menet; 's némely zenék az idegekbe okoznak ez vagy amaz érzést— ezt mind lehet érteni: de hogy mi módon emel a' lelkek világába, 's mintha azok szollanának hozzánk, 's biztatnának, más érintkezésbe nem lehetvén: az oly titok, hogy szinte arra viszen, mintha a' lelkek köz nyelve volna, mellyel ez előtti anyáktol jöttünk.

Az egy-idű rezgések általi hang *zen*nek, 's az 1'' alatti rezgések' száma a' *zen számának* mondatik.

Ha N és M zeneket tesznek, 's az N száma n, 's az M száma m; az a' mivel az N száma szorozva az M számát adja meg, mondatik *M-nek N-re nézti becsének;* mely is $\frac{m}{n}$, mert $n \cdot \frac{m}{n} = m$.

Péld. ha $n = 100$'s $m = 150$ lesz M-nek N-re nézti becse $\frac{150}{100} = \frac{3}{2}$, mert $100 \cdot \frac{3}{2} = 150$.

Ha mikor nyilván nem mondatik valamely zennek becse melyíkre nézt érttetik, mindig bizonyos azon egyre nézt érttessék: mely szerint ezen mindenikre azonegy zennek ugyanarra, azaz a' magára nézti becse 1.

A' nagyobb becsű zen *magasabbnak*, a' kisebb becsű *alsobbnak* avagy *mélyebbnek* mondatik.

A' tapasztalás azt mutatja, hogy minden ének, mely az emberi léleknek (mostani kifejlődésében) kedves, olyan zenekből áll, melyeknek becsei vagy egy megmondanddo törvényü alap-sorbol, vagy az abbol megmondanddo törvénnyel készűlttek közűl valamelyikből vétettek.

Az alap sor törvénye ez:

1. Az első íz 1, s' mindenik íz 1-nél nagyobbal szorzattva adja a' következőt, de $\frac{9}{8}$-nál nem nagyobbal, hogy a' hágás igen nagy ne legyen.

2. Hogy a' szorzo $\frac{n}{m}$ kép alá jöjjön, melyben mind n, mind m szorzata két olyan factornak, mely mindenik valamelyike 2, 3, 4, 5-nek.

3. 'S mindenkor minden lehető ilyen szorzatok legkisebb kifejezetre vétetvén, a' legkisebb felsöjü vétessék a' sor következő ízének.

Mely szerint olyan szorzó csak három van: ugymint

$$\frac{9}{8} = \frac{3.3}{2.4}, \quad \frac{10}{9} = \frac{5.2}{3.3} \text{ és } \frac{16}{15} = \frac{4.4}{3.5}.$$

Mert 2, 3, 4, 5-ből vett két factorral ezek lesznek 2.3, 2.4, 2.5, 3.4, 3.5, 4.5, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5 azaz

6, 8, 10, 12, 15, 20, 4, 9, 16, 25

's mindenik alsojul irattva nállánál nagyobb felsővel, 's legkisebb kifejezésre véve; lesz:

$$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\quad \frac{10}{8}=\frac{5}{4}\quad \frac{12}{10}=\frac{6}{5}\quad \frac{15}{12}\quad \frac{25}{20}=\frac{5}{4}\qquad \frac{6}{4}=\frac{3}{2}\quad \frac{10}{9}\quad \frac{20}{16}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\quad \frac{12}{8}=\frac{3}{2}\quad \frac{15}{10}=\frac{3}{2}\quad \frac{20}{12}=\frac{5}{3}\qquad \frac{8}{4}=\frac{2}{1}\quad \frac{12}{9}=\frac{4}{3}\quad \frac{25}{16}$$

$$\frac{12}{6}=\frac{2}{1}\quad \frac{15}{8}\quad \frac{20}{10}=\frac{2}{1}\quad \frac{16}{12}=\frac{4}{3}\qquad \frac{10}{4}=\frac{5}{2}\quad \frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\quad \frac{20}{8}=\frac{5}{2}\quad \frac{16}{10}=\frac{8}{5}\quad \frac{25}{12}\qquad \frac{12}{4}=\frac{3}{1}\quad \frac{20}{9}$$

$$\frac{20}{6}=\frac{10}{3}\quad \frac{9}{8}\quad \frac{25}{10}=\frac{5}{2}\qquad \frac{15}{4}\quad \frac{16}{9}$$

$$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\quad \frac{16}{8}=\frac{2}{1}\qquad \frac{20}{4}=\frac{5}{1}\quad \frac{25}{9}$$

$$\frac{16}{6}=\frac{8}{3}\quad \frac{25}{8}\qquad \frac{9}{4}$$

$$\frac{25}{6}\qquad \frac{16}{4}=\frac{4}{1}$$

$$\frac{25}{4}$$

Az hol látszik, hogy a többi mind nagyobb $\frac{9}{8}$-nál.

Tehát az alapsor leend:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{15}{8},\ 2,\ 2.\frac{9}{8},\ 2.\frac{5}{4},\ 2.\frac{4}{3}\dots$$

Mert a' legelsőn kezdve 1 a' három szorzóval rendre szorozva, a' legkisebb felsőjü szorzat $\frac{9}{8}$. Továbbá:

$$\frac{9}{8}.\frac{9}{8}=\frac{81}{64},\quad \frac{9}{8}.\frac{10}{9}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4};\quad \frac{9}{8}.\frac{16}{15}=\frac{18}{15}=\frac{6}{5};$$

's $\frac{5}{4}$ a' legkisebb felsőjü.

$$\frac{5}{4}.\frac{9}{8}=\frac{45}{32};\quad \frac{5}{4}.\frac{10}{9}=\frac{25}{18};\quad \frac{5}{4}.\frac{16}{15}=\frac{4}{3};$$

's $\frac{4}{3}$ a' legkisebb felsőjű.

$$\frac{4}{3}.\frac{9}{8}=\frac{3}{2};\quad \frac{4}{3}.\frac{10}{9}=\frac{40}{27};\quad \frac{4}{3}.\frac{16}{15}=\frac{64}{45};$$

's $\frac{3}{2}$ a' legkisebb felsőjü.

$$\frac{3}{2}.\frac{9}{8}=\frac{27}{16};\quad \frac{3}{2}.\frac{10}{9}=\frac{5}{3};\quad \frac{3}{2}.\frac{16}{15}=\frac{8}{3};$$

's $\frac{5}{3}$ a' legkisebb felsőjű.

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{15}{8};\ \frac{5}{3}\cdot\frac{10}{9}=\frac{50}{27};\ \frac{5}{3}\cdot\frac{16}{15}=\frac{16}{9};$$

's $\frac{15}{8}$ a' legkisebb felsöjü.

$$\frac{15}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{135}{64};\ \frac{15}{8}\cdot\frac{10}{9}=\frac{25}{12},\ \frac{15}{8}\cdot\frac{16}{15}=2.$$

Úgy látszik: hogy csak azok a' számok jőnek a' prim factorok között, melyekre a' kört Euclides tudta geometrica constructioval osztani, 's 7 a' melyre Gauss után is (7 magában is) lehetlen, nem jön elé; de potlódik ezen 7 hiánya azzal, hogy a' sorban 1-től (bézárólag) 2-ig (kizárva) éppen 7 van, 's 2 az octava fel felé, valamint 2-től lefelé 1 az octava; 's még ennek felette a 7-dik fel felé nevezetes, megmondanddo okbol *vezér-zennek* mondatván a' *septima*, 's főként alább mondanddo módon nagy szerepet viselvén az egyik zen-nemből másba menetben az úgy nevezett *fő septima*, mely a' másiknál meg magyarázanddo fél közzel alább van.

Az egyszerűbb számokat láthatva könnyebben a' lélek, a nehezebbektől undorodik: némely zene, művésznek is többszeri hallásra tetszik; 's sok dissonantiáink felsőbb lényeknek consonantiák. Sokszor a legkedvesebb consonantia válik dissonantiává, és ez viszont meg igen-is consonantiává.

Elkezdve $\frac{10}{9}$-en, ha mind a' felső, mind az alsó 1-el apad, lesz: $\frac{10}{9}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$, 's azon kettő kivettetvén, melyben 7 van, csak $\frac{6}{5}$ lesz, a' mi nem volt az írt nyolczban; ezen $\frac{6}{5}$ pedig $>\frac{9}{8}$ de $<\frac{5}{4}$-nél, 's $\frac{6}{5}\cdot\frac{25}{4}=\frac{5}{24}$; és alábbi okbul mind $\frac{16}{15}$, mind $\frac{25}{24}$ *fél- köz-szorzónak* mondatik, amaz *nagyobbnak*, ez *kisebbnek*, 's a' nagyobbikkal szorzott zen-becs a' zen' neve után tett *is*-sel a' kisebbikkel osztott a' zen-név után tett *es*-sel jelentetik; mely szerint ha $d=\frac{9}{8}$, 's $e=\frac{10}{9}$, lesz $dis=\frac{9.16}{8.15}=\frac{6}{5}$, 's *ees* (vagy *es*) $=\frac{10}{9}:\frac{25}{24}=\frac{10.24}{9.25}=\frac{16}{15}$. Látszik, hogy *dis* nem $=$ *es*, 's a *d*ről fél közzel hágás 's *e*-ről szállás kis fél közzel nem találkoznak.

Ugyan alábbi okbul ha a' szorzó $\frac{10}{9}$ vagy $\frac{9}{8}$ mind a' kettő *egész* *köz szorzónak* mondatik; amaz *nagyobbiknak*, ez *kisebbiknek*: 's amaz nagyobb secundát ád, ez kisebbet. $\frac{3}{2}$ után $\frac{5}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9}$.

Látszik: hogy az első quinta $\frac{3}{2}$ az 1-től 7 fél közre van. Sokan állítják, hogy mind quintákon hágva fel a' 12-dik quintáig, 's mindenikről az alsó 8-vába szállva le, mind lefelé véve az 8-vákat, az octavának nem csak minden elébbi becsei, hanem az *is*-ek is kijőnek; sőt némelyek azt is állítják, hogy úgy *temperamentum aeque* lesz, melyben mindenik ugyanazonnal szorzatva adja a' következőt. Mindenik hibásan állíttatik. Mert legyen $\frac{3}{2} = z$, 's legyenek az egymásután következő octávák jegyei:

CDEFGAH ℭ𝔇𝔈𝔉𝔊𝔄ℌ *CDEFGAH* *cdefgah* 𝔠𝔡𝔢𝔣𝔤𝔞𝔥

azután veresen írva

cdefgah 𝔠𝔡𝔢𝔣𝔤𝔞𝔥 $\overset{*}{\mathrm{c}}$...

lesz

CDEFGAH	ℭ𝔇𝔈𝔉𝔊𝔄ℌ	*CDEFGAH*	*cdefisgah*		
z	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6

veresen írva

c cis	𝔡 𝔢 𝔣	𝔤is 𝔞𝔥	*c* dis	*efg* ais	*h* 𝔠 𝔡 𝔢 𝔣	𝔤 𝔥 𝔞 $\overset{*}{\mathrm{c}}$
z^7	z^8	z^9	z^{10}		z^{11}	z^{12}

's mindenik rangját z-nek az alsó 8-vába szállítva; például 𝔇-nek első 8-vája le felé $\frac{z^2}{2}$, 𝔄-nak $\frac{z^3}{2}$, *E*-nek $\frac{z^4}{4}$ s. a t.

Lesz:

C	Cis	D	Dis	E	F	Fis	G	Gis	A	Ais	H
$\frac{z^{12}}{128}$	$\frac{z^4}{16}$	$\frac{z^2}{2}$	$\frac{z^9}{32}$	$\frac{z^4}{4}$	$\frac{z^{11}}{2^6}$	$\frac{z^6}{8}$	z	$\frac{z^8}{16}$	$\frac{z^3}{2}$	$\frac{z^{10}}{32}$	$\frac{z^5}{4}$

Mely szerint C = 1 lenne $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 128 = \frac{539541}{524280}$'s a' sorban is csak D $= \frac{9}{8}$ jőn ki jól és G $= \frac{3}{2}$, de E $= \frac{3^4}{2^6}$-nak jőn, mely nem $= \frac{5}{4}$, így F jön-ki $\frac{3^{11}}{2^{13}}$ mely nem $\frac{4}{3}$'s úgy tovább. Tudatik az Arithmetikából, hogy akármely számnak edjetlen előszám képe van; tehát péld. A itt $= \frac{z^3}{2}$ nem $= \frac{5}{3}$; mert úgy $3 \cdot 3 . 3 . 3 = 2^4 . 5$ volna. Megjegyzendő, hogy $\frac{z^3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{81}{80}$ *commának* szokott neveztetni. Nem is temperamentum æquale. Mert csupán

$$\text{F} : \text{Fis} = \text{Fis} : \text{G}\,; \text{ az holott is } \frac{z^{11}}{2^6} . z = \left(\frac{z^6}{2^3}\right)^2$$

Közönien pedig ha α, β, γ három egymásután következő izeit teszik ezen sornak, 's eggy párzati sor, úgy $\alpha\gamma = \beta^2$ és $\frac{\alpha\gamma}{\beta^2} = 1$ volna, mely az írtt eseten kívűl nincs. Ugyan-is a' 2-dikon kezdve, 's mindeniknek alá írva az otti $\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}$ becsét, ez a' sor lesz

$$\frac{z^{12}}{2^7} \quad \frac{z^{12}}{2^4} \quad \frac{2^7}{z^{12}} \quad \frac{z^{12}}{2^7} \quad \frac{2^7}{z^{12}} \quad 1 \quad \frac{z^{12}}{2^7} \quad \frac{2^4}{z^{12}} \quad \frac{z^{12}}{2^7} \quad \frac{2^4}{z^{12}}$$

Cis és *Des*, *Dis* és *Ces*, *Eis* és *F*, *E* és *Fes*, *Fis* és *Ges*, *Gis* és *Aes*, *Ais* és *Hes*, *His* és *C* között vagy kicsi vagy 0 különbség lévén, ezen párok közűl mindenik egynek vétetvén, marad *C* és *c* közt 11 úgymint *C Cis D Dis E F Fis G Gis A Ais H*, *c*

(Klavíron úgy se vétetthettvén *Cis* és *Des* külön, hegedűn lehet)

S a' temperamentum æqualera lenne, ha $C = 1$ vétetik, $Cis = x$ $D = x^2$, $E = x^3 \ldots$'s $c = x^{12}$; tehát mivel $c = 2$, lesz $x^{12} = 2$, tehát $12 \log x = \log 2$, $\log x = \frac{\log 2}{12}$

E' szerint nem csak a' fölebbi alapsor ki nem jő, hanem akármelyik vétessék alapnak, a' mindjárt következő törvényű ének sorban, mind hasonló melodia jöne ki, csak hogy egyik magasabb a' másiknál, 's elveszne a' különböző *Tonárt*ok különböző hatása is.

De csakugyan közelítvén ezen sor a' valóhoz, innen jött az úgynevezett *egész köz* és *fél köz* név; mivel péld. x^1-től két lépés van x^3-ig, úgymint $3-1=2$, 's ugyan x^1-től x^2-ig van $2-1$ lépés, tehát fél-annyi, szintúgy x^2-től x^3-ig $3-2=1$ tehát fél annyi mint x^1-től x^3-ig.

A' fölebb az alapsorból származanddo sorok' törvénye ez: irattassanak *C Cis D Dis*... *c* egy kör körűl nyíl-irányt téve *C*-től, *Cis*, *D*... felé; 's elkezdve *C*-nél vétessék a' tőle 2 félközre lévő, onnan megint a' 2 félközre lévő 's attol az egy félközre lévő, és onnan a' két 's onnan megint két 's onnan is két félközre lévő, és innen a'félközre lévő éppen *C*-re tér vissza; mely is az alapsor. Azután *Cis*-től kezdve, ugyanazon tőrvény szerinti közekre készűljön uj sor, 's mindenikkel ez vitessék végbe; 's mindenik igy készűlt ének-sor *alapzenjének* mondassék az a' honnan kezdődött.

Jegyzés 1. Hogy az ily *diatonica scala* (mely is a' neve az ily sornak) énekeltethessék, *ut re mi sol fa la si*-val neveztettek a' zenek.

2., *C*-től kezdve a *C* utáni 7 első betűkkel neveztettek az alapsorban, kivéve az utolsót, melyet ha *b*-vel neveztek volna, kör-körűl írva, folynának a betük rendszerint, minden octávákon; akkor a félközzel szállított *b* lehetne a' *h*.

Mikor a 7 planetai hit uralkodott (mint ma is a'köznépi kalendariomban rendre uralkodnak) ezen 7 zent a' 7 plánétákkal hasonlították egybe (ma a' diatonica meg volna szaporodva); 's onnan jött a' sférák harmoniája, mely igaz is, a' mennyiben minden számtalan napi oltár gyertyáknál Isten dicséretivel zeng a' szent éjszaka.

3. Azon sornak izeiben is a' nagy zen-művészek mély bélátással igazították, részint a különböző Tonártok' hatályára, 's részint is különösön a' quinták és octávák tisztasága eggyütt (a fölebbi szerint) meg nem állhatván, a' lehetségig kivánván egyeztetni; melyre nézve a' nem tiszta octáva kiállhatatlanabb lévén, az oktáváknak szükséges kedvezés a' quinták contojára esik; és ezt a' *quinták temperaturjának* nevezik.

A' zen' hallhatósága' határait különbözőleg határozzák, a'fülek is különbözvén (nem a' nagyságra, hanem az érzésre nézt): ha 20 rezgésnél kevesebbet teszen a' húr, vagy 20 ezernél többet 1'' alatt, nem hallja a' közép érzésű emberi fűl; mint az óra-mutato a' mozgás' lassúsága 's az ágyú-globis (oldalfélt nézve) a' sebesség miatt nem látszik; amannak igen kicsi idő múlva lévén más a' képe helye a' retinán, 's ennek képe nem lévén elég ideig egy helyt.

A' leg mélyebb férjfi-zen 192 rezgésü 1'' alatt, a' legmagasabb 633; a' leg mélyebb női zen 576, a' legmagasabb 1720, melyet a' föld egyenlítője diameteréről emlékezetben lehet tartani, minthogy olyankor szokott felemelkedni, mikor az egyenlőség kérdése feletti egyenetlenséget rezgései számával egyenlíti.

Legyen nyomtatott C a' Contreviolon alsó húrja' zenje, 's a' neve ezen zennek legyen *czár*, 's 𝕮 a' Violoncello alsó húrja' zenje legyen *czál*, *C* a' viola alsó húrja zenje neve legyen *czo*, 's a' hegedű alsó húrján 3-ik ujjal vett zen legyen *czu*, 's maga az alsó húr *go*; 's c zennek neve legyen *czé*, azután feljebb veresen írott *c*-nek neve *czi*, 's veresen írtt c neve legyen *czil*, 's $\overset{*}{c}$ a' következő oktavában legyen *czír*.

'S a' több zenek is a' betű után téve az octáva elsője után tett syllabával neveztessenek.

A' Contreviolon, Violoncello, Viola és hegedű, mindenik 4 húru 's alólrul kezdve mindenik húrnál a' következő, quintával van feljebb: Tehát alolrol kezdve ezen négy szerszámon a húrok:

A' Contre-Violonon	C, G, 𝕯, 𝕬	azaz Czár, Gár, Dál, Aál
Violoncellon	𝕮, 𝕲, *D*, *A*	azaz Czál, Gál, Do, Ao

Violán *C G*, *d*, *a* azaz czo, go, du, au
Violonon (hegedűn) *G*, *d*, *a*, e azaz go du au eé
Aál mondatik *Á*-nak, *eé* is *é*-nek.

A' Viola 3 felső húrja a hegedű 3 alsójával egyezik; úgy hogy amannak legalsóbb húrjától a' hegedű alsója quintára van.

A' klávír közepétől jobbra első zen *czu*, azaz *c*, mely a' hegedű *a* húrján 2-dik ujjal vitetik.

Ha C az-az *Czár* 32 rezgés, $\mathfrak{C}$ akkor 64, $C = 128$, $c = 256$, $\mathfrak{c} = 512$, deák veresen irt $c = 1024$, veres $\mathfrak{c} = 2048$, $\overset{*}{\mathfrak{c}} = 4096$

A' Stimmgabel *a* azaz *au* a' hegedűn alulról 3-dik húr rendszerint $429\frac{1}{3}$ rezgés; mert ha $\mathrm{C} = 32$, $\mathrm{A} = \frac{32.5}{3}$, 's $\mathfrak{A} = \frac{64.5}{3}$, $A = \frac{128.5}{3}$, $a = \frac{256}{3} \cdot 5 = \frac{1280}{3} = 429\frac{1}{3}$. 'S ha *a* némely helyt 434 rezgésnek vétetik, könnyű felszámítni, hogy ott C hánynak vétetik; legyen x, lesz $a = \frac{8x.5}{3} = 434$, tehát $x = \frac{3.434}{8.5} = \frac{3.217}{20} = \frac{651}{20} = 31\frac{11}{20}$

aé az-az $\mathfrak{a}$ a' hegedű felső húrján 3-dik ujjal vitetik, 's az első applicaturában első ujjal, *ci* a' 2-dik applicaturában első ujjal, *ei* a' 3-dik applicaturában első ujj, és *gi* a 4-dikben első . . .

A' zenek rendszerint 5 líneával jegyeztettnek: mindenik líneán 's a' líneák közt is a' kóta-jegy zent jelent, 's mind hágva felfelé; az also líneán alol 's a' felsőn feljűl pedig elébb csak csupán a' kóta jegy, azután kalapos nyakravaló nélkűl, azután kalapatlan nyakravalós, azután kalapos nyakravalós, 's minden kalapos után eggyel több nyakravalós kalapatlan, 's minden kalapatlan nyakravalós után eggyel kevesebb nyakravalós kalapatlan.

De látszik, hogy ha több línea volna, vagy 5 lineával kalapos 's nyakravalósokkal kellene ki jelenteni a' zeneket, a' szemet el fárasztaná; péld. ha az alsó líneán álló kóta, (mint a' hegedűbe) *e*, alatta *d*, azután a' kalapos következvén ez *c*, 's $\mathfrak{C}$-nek kijelentésére kalapos 7 nyakravalóval kellene; úgymint mutatja

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \overset{*}{0} & 1 & \overset{*}{1} & 2 & \overset{*}{2} & 3 & \overset{*}{3} & 4 & \overset{*}{4} & 5 & \overset{*}{5} & 6 & \overset{*}{6} & 7 & \overset{*}{7} \\ c & & & & & & & C & & & & & & & \mathfrak{C} \end{array}$$

a' szám a' nyakravalók számát s' a' csillag a kalapot jelentvén.

Erre nézve találtattak fel az úgy nevezett *c*, *f* és *g* kolcsak, melyek közül az egyik, úgymint a' *C* kolcs három féle: mind a' három *C* kolcsnak egy jegye van, csak helyre nézt különböznek; ha az alsó líneán áll *discant* vagy *soprano kolcs*nak, ha alólról a' harmadik lineán áll: *Viola* vagy *Alto kolcsnak*, ha a' 4-iken áll *Tenor kolcsnak* mondatik; 's mind a három meg egyezik abban, hogy a' mely líneán áll az írtt jegy, az azon líneáni kóta-jegyet *c* = *czu* jellentésűvé teszi, a' többit is ahoz képest változtatva. Az *f* kolcs' jegye más forma, 's a' 4-dik líneán áll alolrol, 's azon líneának *F* = *fo* jelentést ád. A' hegedű-kolcs alolrol 'a 2-dik líneán áll 's annak *g* = *gu* jelentést ád.

'S okos gondolat volt, hogy az octava betűjivel ki lehessen írni a' zenjegynek kereszt elíbe tételével annak félközzel emelését, 's *b* elébe tételével félközzel szállítását jelenteni ki; sőt csak elől írva ki bizonyos számú keresztet, vagy bizonyos számú *b* betűt, azzal kifejezni azon diatonica scalat, melyből a' nota zenjei vannak: ugyan-is mindjárt meglesz, hogy akkor melyik betűket kell félközzel változtatni mindenütt, a' hol a' feloldás jegye nincs; ha pedig ezenkivűl van emelés vagy szállítás, az külön jelentetik ki.

A keresztek kijőnek *c*-től számlálva bézárólag a' 4-dik betűig, 's mindig 4 betűt számlálva hozzá, míg mind a' 7 betűre jő a' kereszt, mindíg a' számlálásban 5-dikre esvén. A' *b* betű számára nézve *h*-tól kezdve, melyen az első *b* áll, mindig bezárólag számlálva a' 4-dik betűre esik a' *b*.

Az alap-zen pedíg a' keresztesekben az utolsó kereszt' betűjén egész közzel feljűl esik, tehát kivéve az *e* és *h* betűket, mindig a következő betű, de ha az utolso kereszt betűjén nem *c* hanem *cis* van egész közzel feljebb, 's ha *e* az utolso kereszt betűje, *fis* van egész közzel feljebb.

A' *b* betűsekben pedig, ha *n* számú *b* van $\frac{5n}{12}$-ből a' hány marad, annyi félközre van *c*-től az alapzen, melyet így-is fejezhetni ki Res $\frac{5n}{12}$. Szintúgy az *n* számú keresztesben az alap-zen Res $\frac{7n}{12}$ félközre van *c*-től.

Még alább más szabály is adódik. Oka ezeknek a következő:

I. Elébb a' kereszteket véve. A' kör 2.3 részre osztatva, mint a' hatágba, az egyik résznek fele 2 rész után 's a' más fele 3 rész után tétettvén az octava közei a' *c*-re épült diatonica scalában ki ábrázoltatnak.

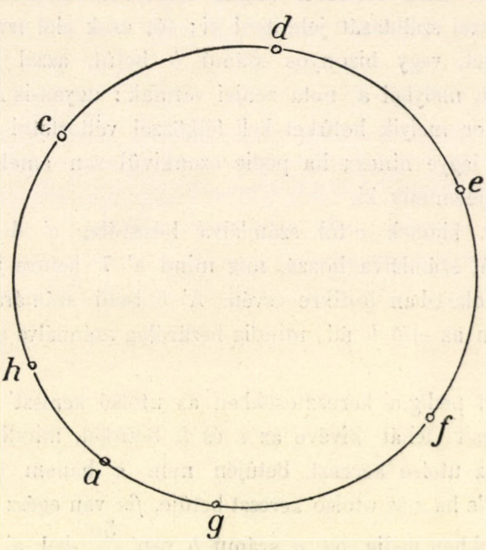
Itt *c*-től *f*-ig 2 egész 's fél köz, s' *f*-től *c*-ig 3 egész 's fél van; 's 5 félközre az alaptol van az a' betű, melyet megkeresztezve csak 1 kereszttel diatonica lesz: mert *f*-ből *fis* válván *g*-től *c*-ig 2 's fél köz 's *c*-től *fis*-ig 3 egész 's *fis*-től *g*-ig fél van.

Tehát a' hol 1 kereszt volt, *g* az alap, *c*-től 7 félközre; 's onnét

7 fél közre az alap két kereszttel 's közönien n kereszttel az alap c-től $7n$ félközre van. Az n-dik kereszt pedig 5 félközre van az $n-1$ keresztű diatonica alapjától, tehát c-től $7(n-1)+5=7n-2$ félközre.

És így minthogy 12 félközre mind azon betűk kerűlnek elé, az n keresztű alap Res $\frac{7n}{12}$ félközre esik c-től, az n-dik kereszt pedig Res $\frac{7n-2}{12}$ félközre.

'S minthogy $7n-2$ félköz meg 2 félköz $=7n$, tehát az utólsó kereszt betűje egész közzel emelve adja meg az alapot.



1. ábra.

A' következő kép ki mutatja, hogy $7n$ ki adja mindenik betűt c és f-en kívűl, melyek helyibe *cis* *fis*-t ad; $7n-2$ pedig mindenik betűt adja ki. Legyenek az n becsei 1, 2, 3, 4, 5, 6

Alapok		Keresztek betűji	
7.1	*g*	7 — 2	*f*
7.2	*d*	14 — 2	*c*
7.3	*a*	21 — 2	*g*
7.4	*e*	28 — 2	*d*
7.5	*h*	35 — 2	*a*
7.6	*fis*	42 — 2	*e*
7.7	*cis*	49 — 2	*h*

Tehát a' keresztek éppen azzal a' renddel jönek ki, a' mint vannak a betűk lefelé; 's mindenik 7 félközre van az elébbitől, 's az első pedig c-től 5 félközre, mely is az első 4 betűben végső a' 2-dik kereszt a' következő 4 betűben végső 's úgy tovább: mindenikkel 7 fél köz lesz az első 5 után.

II. A' b betűre nézt is mutatja a' kör, hogy csak egy betűnek a' diatonicában félközzeli szállításával, az első b 11 félközre esik c-től, úgy mint a' 3 egész köz végén h-ra; a' midőn is f-től mely c-től 5 félközre van, a' leszállított h-ig 2 egész és fél van, 's onnan c-ig 1 egész, mely után f-ig 2 és fél van.

Tehát akármely diatonicából diatonica lesz, ha 5 félközre az alapjától vétetik az új alap, 's az elébbi alaptol 11, tehát az újtol 6 félközre jön az új b. Mely szerint az n-dik b esik c-től $5n+6$ félközre.

Legyen ez is következő képpel kimutatva; melyben az f is ki jön alapnak, mely előbb kimaradott.

Alapok		b betűs betűk	
5.1	f	$5+6$	h
5.2	$ais = has$	$10+6$	e
5.3	$dis = es$	$15+6$	a
5.4	$gis = as$	$20+6$	d
5.5	$cis = des$	$25+6$	g
5.6	$fis = ges$	$30+6$	c
5.7	$h = ces$	$35+6$	f

Itt is a' b betűk rendre esnek a' le felé jövő betűkre 's az elsőtől, úgymint h-tól kezdve mind 5 félközzel esnek, 's mind ki jőnek h-to kezdve a 4-dik betűig számlálva, 's ezen kezdve megint 4-ig számlálva 's mind ezt téve. Ez a' mód az első kereszttől számlálva is az ottit adja, de ott 5-ig kell számlálni.

Megjegyzenddő még, hogy a' keresztek betűji alolrol fel [ugyanaz, mint] a b betű sora feljűlről lefelé.

Azért olyan mondattal is, melynek vissza felé is értelme van, 's az első betű a' kereszttel vagy b-vel ruházanddo, észbe tarthato.

Péld. Csillagokon feljűl Gabriel dicső árkangyal énekel hallelujáť.

Halleluját énekel árkangyal dicső Gábriel feljűl csillagokon.

Az első a' kereszté, a' 2-dik a' b betűé.

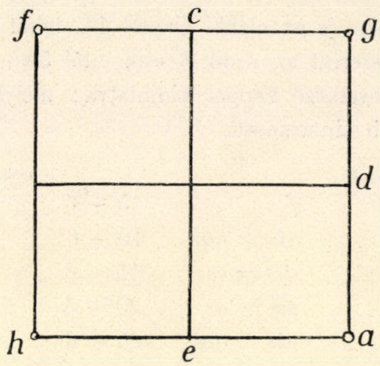
'S még egy más mód.

Négyszögnek szöghegyeire írattassék jobbra [előre haladva] f, g, a, h, 's ugyan arra f és g közé c, azután d a következő kettő közé, 's e a' következő kettő közé. Látszik, hogy f-től jobbra, a keresztes betük rendje, s' h-tol vissza felé a b betűké.

Az alap a' keresztesben az utolso kereszt' betűje egész közzel emelve ugymint (. . .) $7n - 2 + 2 = 7n$; tehát a' betű után az éneksorban következő, ki vétettvén a' két végső ugymint e és h, mert itt az egész közzel feljebbiek *fis*, *cis*.

A' b betűsben az alap az utolso b betűje után a' négyszög körűl (a' b betűk irányán) következő betű fél közzel emelve: mert

$$5n = 5(n+1) + 6 = 5n + 11, \text{ 's } 5n + 11 + 1 = 5n + 12,$$



2. ábra.

és ennyi fél közre c-től éppen az a' betű van, mint $5n$ félközre; $5(n+1) + 6$ pedig éppen a következő b betűs. De ha $n = 7$, akkor $n + 1 = 8$, 's csak 7 betűre eshetik b; tehát mikor az utólsó b az f-re esik, akkor az alap h (. . .), nem *his* — az-az c.

Megjegyzendő az is: hogy 7 b-nek s 5 #-nek alapja azon egy, úgy mint h; szintúgy 6 b-nek s 6 #-nek *fis* 's 5 b-ek 's 7 #-nek *cis*.

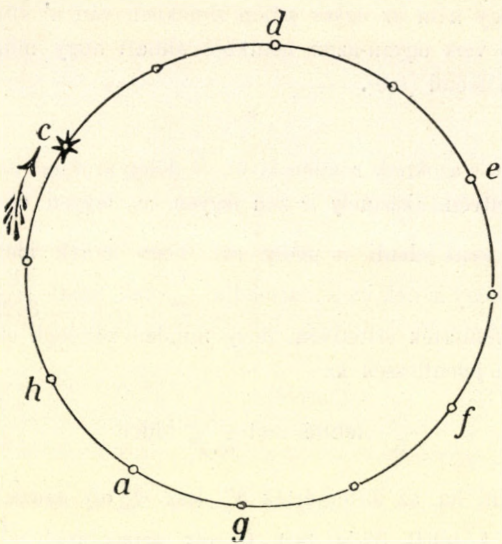
De ezen alap *dur*-nak mondatik, melyre a' diatonica scala épűl: 's van egy más scala, melyben a' közök így következnek:

$$1 \; \tfrac{1}{2} \; 1 \; 1 \; \tfrac{1}{2} \; 1 \; 1,$$

's az első zen *moll*-alapnak mondatik. Látszik, hogy ezek éppen feljebb a' köröni közök, csak a' moll-alap más fél közzel alább van. Tehát a' dúr-alapot más fél közzel kell szállítanı, hogy a' moll alap kijöjjön: és így a' keresztesben az utólsó kereszt betűjét fél közzel kell szállítani. 's a' b betűsben az utolso b betűje után következő b betűst egészközzel kell szállítani; megjegyezvén itt-is, hogy a' 7 *b*-ben *f* lévén az utolso, 's az iminti szerint *h* a' dur-alap, másfél közzel alább *as* a moll alap.

Innen megfordítva, ha az a kérdés: bizonyos nevű dúr vagy moll hány kereszt vagy hány *b*? Meg kell nézni az irtt négyszög körűl, ha dur melyik van egész vagy fél közzel alább, mint a' megadott betű; az első esetben *f*-től kezdve addig a' betűig (bézárólag) mind kereszt, a' 2-dik esetben *h*-tól balra addig a' betűig ezt kizárva mind *b*.

Ha moll: azt a' betűt kell a' négyszög körűl venni, melyik a' megadottnál feljebb van félközzel, vagy egésszel; az első esetben azon



3. ábra.

betűig (bézárólag) *f*-en kezdve mind kereszt, a' 2-dikban *h*-tól ellenirányba azon betűig (ezt kizárva) mind *b*.

Oka az elébbiből nyilvános. Ha *C* dur vagy *A* moll van, se kereszt, se *b* nincs e' szerint is: mert *c*-nél egész közzel alább nincs a' négyszög körűl, félközzel alább van *h*, de *h*-tol *h*-ig ezt kizárva egy *b* sincs. Szintúgy *A*-nál félközzel felsőbb nincs, de van egésszel, 's az megint *h*, 's itt is a' szabály szerint *h*-tol *h*-ig ezt kizárva volna *b*, tehát nincs.

Még vagy két példa: a' hegedű húrjai alolrol fel mutatják az 1 keareszttől négyigi zenék' dur alapjait; ha 1 keresztes, *g* az alap, ha kettő, úgy *d*, ha három, úgy *a*, ha négy úgy *e*. A' szabálybol az is látszik, hogy cis dur 5 *b*, mert cisnél *c* van alább félközzel; cis moll pedig 5 kereszt, mert *d* van feljebb félközzel; *e* dur 4 kereszt, mert *d* van alább egész közzel; *e* moll 1 kereszt, mert *e*-nél *f* fél közzel feljebb van, tehát a szabály szerint *f*-től *f*-ig bézárólag kereszt, az-az 1 kereszt.

Akárhány *b* betűs, vagy akárhány keresztes legyen a' diatonica: egy kör körűl írva az alapon kezdve, mely a' ⋆-nál legyen; látszik, hogy a' ⋆ megett 3 fél közzel kezdve a' nyil irányában ezen közek sora lesz: $1\ \frac{1}{2}\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ 1\ 1$, mely olyan alapu *moll scala*-nak mondatik, a' milyen nevű az első.

Látszik, hogy nem az egyes külön zenekben van a' különbség, mint két különböző vers ugyan-azon betűkből állhat: hogy miben áll a különbség, alább leénd [szó].

⋆

A' zeneken 's azoknak rendén kivűl, fő dolog azoknak ideje. A' pauza 0 zennek vétettvén, akármely x zen legyen, x_n legyen oly kettős jegy, melyben x a' zent jelenti, n pedig azt, hogy x-nek ideje $\frac{1}{2^n}$ legyen, $\frac{x_n}{3}$ pedig azt, hogy x-nek ideje harmad[a] $\frac{1}{2^n}$-nek tehát $\frac{1}{3.2^n}$ legyen; az 1-en azon id-főmérték érttettvén, mely minden zenének elején másodpercz-számmal jelenttessék ki.

$$\frac{x_n}{5} \text{ tenné } x\text{-et } \frac{1}{5.2^n} \text{ iddel.}$$

Mely szerint ha az id-főmérték 3″, lesz 0_0 oly pauza, mely $\frac{1}{2^0}$-ig, azaz $\frac{1}{1}$ azaz 1 tehát 3″-ig tart, 0_1 oly pauza, mely $\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$ azaz $\frac{3''}{2}$-ig tart, 0_2 pedig $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ azaz $\frac{3''}{4}$-ig tart, 's $\frac{0_2}{3}$ oly pauzát, [jelent], mely $\frac{1}{2^2}$-nak harmadáig, tehát $\frac{1}{3.4}$ azaz $\frac{3''}{12}=\frac{1''}{4}$-ig tart.

Szintúgy van az idje akármely x zen-nek mely 0 helyébe tétetik.

x_0 mondatik (idejére nézve) *egész notának*, x_1 *fél notának*, x_2 *fertálynak*, x_3 *nyolczadnak*, x_4 *tizenhatodnak*, x_5 *harmincz-kettödnek*, x_6 *hatvan-negyednek*, x_7 *százhuszon-nyolcadnak* — mondatnak, mivel

$$\frac{1}{2^0}=1;\ \frac{1}{2^1}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{2^4}=\frac{1}{4};\ \frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};\ \frac{1}{2^4}=\frac{1}{16};\ \frac{1}{2^5}=\frac{1}{32};$$

$$\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64};\ \frac{1}{2^7}=\frac{1}{28}\dots$$

A' szokott ki-jelentések:

𝅝 $= x_0$; 𝅗𝅥 $= x_1$; ♩ $= x_2$; ♪ $= x_3$; 𝅘𝅥𝅯 $= x_4$; 𝅘𝅥𝅰 $= x_5$; 𝅘𝅥𝅱 $= x_6$; 𝅘𝅥𝅲 $= x_7$.

Maga a' zen pedig a' szokott módon a' líneák 's kolcsok által jelentetik, itt pedig azzal, hogy x helyébe a' zennek betű-jegye iratik.

Látszik, hogy ha a' kota-jegy üres 's nincs szára, akkor x-hez jobbra alul 0 iratik, ha szára van 's üres, 1 iratik, 's szára van s' teli, 3 iratik, 's ha szára van, teli 's m számú vonás van a' szárán keresztűl, úgy x-hez alul $m+2$ iródik.

'S a szokott akármely zen-jegynek felibe 3 van le fordulolag irva, az (az idre nézve) harmadát jelenti annak, a' minek fele volna azon felibe tett jegy nélkűl: és neveztetik *triol*-nak azzal a' névvel, mely az idre nézti neve azon kotának, melynek felibe iratott a' leforduló 3.

Igy ∞𝅝 $= \frac{2}{3}$, mert annak kell venni harmadát a' minek 0 fele, tehát 2-nek, mert 1 kettőnek a' fele. Igy ∞𝅗𝅥 $= \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$, mert $\frac{1}{2}$ egynek fele; így ∞♩ $= \frac{𝅗𝅥}{3} = \frac{1}{3.2}$, mert ♩ $= \frac{1}{4}$ félnek fele. ∞♪ $= \frac{1}{3.4}$, mert $\frac{1}{8}$ a fertájnak fele, ∞𝅘𝅥𝅯 $= \frac{1}{3.8}$, mert $\frac{1}{16}$ a' nyolczadnak fele. ∞𝅘𝅥𝅰 $= \frac{1}{3.16}$, mert $\frac{1}{32}$ az $\frac{1}{16}$-nak fele 's a' t.

∞𝅝 neve *egész triol*, ∞𝅗𝅥 *fél triol*, ∞♩ *fertály triol* ∞♪ *nyolczad triol* ∞𝅘𝅥𝅯 tizenhatod triol ∞𝅘𝅥𝅰 harminczketted triol 's a' t.

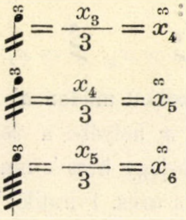
Közönien ha x_{m+2} felibe gondoljuk a' le fordított 3-at, lesz $\overset{\infty}{x}_{m+2} = \frac{x_{m+1}}{3}$; mert x_{m+2} az x_{m+1}-nek fele. Ha $m=0$, akkor $\overset{\infty}{x}_{0+2} = \overset{\infty}{x}_2 = \frac{x_1}{3}$; 's tovább menve balra, 's elébb m-et —1-nek, azután — 2-nek véve lesz $\overset{\infty}{x}_1 = \frac{x_0}{3}$, 's $\overset{\infty}{x}_0 = \frac{x_{-1}}{3}$ = (az idre nézve) $\frac{1}{3.2^{-1}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \overset{\infty}{0}$, valamint ∞𝅗𝅥 $= \overset{\infty}{x}_1 = \frac{1}{3}$, 's ∞♩ $= \overset{\infty}{x}_2 = \frac{1}{3.2}$; 's ∞♪ $= \overset{\infty}{x}_3 = \frac{1}{3.4} \ldots$

∞𝅝 $= \frac{x_{-1}}{3} = \overset{\infty}{x}_0$

∞𝅗𝅥 $= \frac{x_0}{3} = \overset{\infty}{x}_1$

∞♩ $= \frac{x_1}{3} = \overset{\infty}{x}_2$

∞♪ $= \frac{x_2}{3} = \overset{\infty}{x}_3$

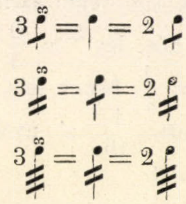


'S világos, hogy akármely nevű triolbol három teszen eggyel kevesebb nevűt, 's két olyant, a' milyen a' felibe irtt 3 nélkűl.

Mert legyen $\alpha =$ fél β, lesz az α triol $= \frac{\beta}{3} = \overset{\infty}{\alpha}$; tehát

$$3\,\overset{\infty}{\alpha} = \beta = 2\alpha.$$

Igy:



's a' t.

E' szerint $\frac{x_n}{3}$ iratthatik $\overset{\infty}{x}_{n-1}$-al, hogy az also ne vegyen rendet-el.

A' szokott módon, ha valamely zen-jegy után pont van, még fél annyira nyujtja idejét 's ha ezen pont után még kisebb, még az elébbi pont által jelentett nyujtásnak, még fél akkora nyujtását jelenti, mely itt is meg tarttatik.

A' szokott módon akarmely zent tegyen x a' 0-n kívűl $\sharp x$ teszi az x-nél félközzel magasabbat, 's ^{b}x a' fél közzel alsobbat, 's ezen jegyzet minden olyan nevű zenre szoll, azon x-től kezdve a' következő tactus első zenjéig (bézárólag); mit tegyen *tactus*, mindjárt megmondatik. A' szokott fel-oldás $\natural$, mely arra is szoll, mikor előre ki van téve, hogy az egész zene hány keresztes, vagy hány b betűs, a' midőn a' feloldo jel nélkűl tudatik, melyik betűket miként kell félközzel változtatni. A' feloldó jel is azon betűre nézve, mely felett van balra a' következő tactus első zenjéig (bézárólag) hat.

Itt lehet $\sharp x$ helyett $+x$, ^{b}x, helyett $-x$ és $\natural\, x$ helyett $\pm x$.

Ha több zenek szolnak együtt, lehet függélyileg írni lefelé itt is betűkkel, 's ha tetszik zárjel közé rendbe lehet irni.

Tactusnak pedig mondatik minden két közelébbi függélyi linea közötti zenek' azonegy id-summája: ugyan-is ezen summa elől ki van téve, hogy mennyidje az azon zenében vett id-főmértéknek: és id-mérés könynyítésére, 's mikor többen jádzanak együtt, az együtt tartásra helyesen gondoltatott; mert csak a' tactus kezdeten szabad le ütni, 's ha az igazgató leüt, mindenik észre veheti hibáját, ha nem ott van.

Itt a' két függélyi línea helyett lehet a' tactus elején 's végén „ jegy.

A' tactus verésre nézve lesz szabály alább. Könnyen lehetne oly gépet csinálni. mely mindenkor az id-főmértékre vonattván fel, alkalmatlan, lármás hang nélkűl veri a' tactust.

Ezek szerint a' zenét következő módon lehetne írni:

Elsőben egy olyan szót, mely a' lelket a' zenéhez alkalmazza; utána mindjárt az azon zenében vett id-főmérték másod percbe tétetthetik; azután a' keresztek vagy *b* betűk száma, végre a' tactus-beli id summa, az ott felvett id főmérték $=$ 1-re nézt fejeztettve ki.

Az n számú kereszt jelentetthetik $+n$-el 's az n számú b pedig $-n$-el; ha sem $+n$, sem $-n$ nincs, azt teszi, hogy se kereszt, se b.

Péld. Maestoso. $2''$; $+2$; $\frac{2}{4}$, azt teszi, hogy a' zene felséges érzetü, az id főmérték $2''$, a' zene két keresztes, az honnan tudatik, hogy minden f-ből $+f$'s minden c-ből $+c$ lesz, 's tudatik az alap a' föllebbiből, 's azután válik meg a' szerint, hogy dur-é vagy moll, mi a' *tonica*, az alap-zen. A' végső $\frac{2}{4}$ pedig azt teszi, hogy egy tactusban lévő zenek idjei öszvete 2 negyede az itti $1=2''$-nek, tehát $1''$.

Ha több zennek együtt-hangzása kedvelt: *consonansaknak* hívják azt, a' mely a' mással együtt kedves; ha a' melodia' zenéhez tétetik még más (egy vagy több) *accord*-nak mondatik.

A' tapasztalás itt is azt mutatja, hogy a' zenét hallo lélek számit, 's csak azt szereti, a' mi eléggé el foglalja, 's undorodik a' bajosabbtol; 's úgy látszik, hogy itt is a' fölebbi 2, 3, 4, 5 szerepelnek. Ugyan-is 1-től kezdve a' zen-becseket, a kis secunda $\frac{10}{9}$, tehát a' míg amaz egy rezgést tesz, ez $1+\frac{1}{9}$-et teszen, 's nem kedves; a' nagy secunda $\frac{9}{8}$, tehát az elsőnek 1 rezgése alatt ez $1+\frac{1}{8}$-at teszen, 's nem kedves; a' kis tertia $\frac{6}{5}$, tehát ennek az alatti rezgése $1+\frac{1}{5}$, és már ez consonans, még pedig egy süsig dolgot adva, szomorú; a' nagy tertia $\frac{5}{4}$ tehát rezgése $1+\frac{1}{4}$, 's ez könnyebben foghato vidámabb consonans; a' quarta $\frac{4}{3}$ tehát ugyan azon id alatti rezgése $1+\frac{1}{3}$'s ez is már nehezebben érthető consonans; a' quinta $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$ legkönnyebben érthető 's az octava $2=1+1$ még könnyebben érthető consonansok. A' sexta $\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}$ bajosabb; 's a' septima $\frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8}$, 's a' fő septima $\frac{225}{128} = 1 + \frac{97}{128}$ dissonansok, különösen a fő septima elcsüggesztő nehéz, mely midőn feloldatik, mint a' meredek hegy után a' lejtő megkönnyűlés' kedves érzését okozza, mint a' haldoklás kínjaiból való kiszabadúlás.

Ha az 1 becsű zen *Z*-nek mondatik, 's a' rezgések együtt kezdődnek: *Z*-nek 9-dik rezgésének felel meg a' kis secunda 10-ik rezgése, 's a' 8-diknak a' nagy secunda 9-dike, az 5-diknek a' kis tertia 6-dika, 4-dikének a' nagy tertia 5-dike, 3-dikának a' 4ta 4-dike, 2-dikának a' quinta 3-dika, 3-dikának a sexta 5-dike, 8-dikának a' sept. 115-ike, 's 128-dikának a fő sept. 225-dike.

'A *trias harmonica* 1, 3, 5 legtökélyesebb, 3 a' nagy tertiát mely 2 egész közre van, 's 5 a' 2 egész 's 1 nagy fél közre lévő quintát téve. A' kisebb trias[ban] a' tertia kicsi, az-az más fél közre van, 's szomoru, modest. A' megkisebbitett triasban nem-csak a' tertia kicsi, hanem a' quinta is úgymint 2 egész közre van ; mely-is kétséget 's nyughatlanságot okoz.

A' teljesebb állásért a' zene zenjeinek bassus adatik, mely Grundbassnak mondatik, 's a' szabály[a] ez :

1, 3, 5, 8 az-az a' primának, tertiának, quintának octávának a' *tonica* adatik, mely például *C* durban *C*, *A* mollban *A*; 2-nek 's 7-nek, (mely visszafelé 2-dik) quinta adatik, 's 4-nek és 6-nak a' quarta (noha ez is többként változhatik).

Az accord a' Grundbasstol felfelé számlálódik, 's a' reá tett triassal együtt, a' melodia zenje' *dominans accordjának* mondatik; 's a' Grundbass tertiája, azon *zen' dominans accordja tertiájának* mondatik. A' trias *a' melodia zenje triássának* mondatik quinta *dominansnak* 's a' quarta *subdominansnak* mondatik.

A' triasba pedig 1, 3, 5-ben 1 helyett 8 is tétethetik, sőt akármely permutatioban is teszi a' zen-művész ; sőt sokképen variálhatja különböző Stimmekben triolok, nyolcadok, tizenhatodok . . . 's pont által.

Van septimica accord-is 1 3 5 7 ; 's van 1 3 5 9, 1 3 5 11, 1 3 5 13 sőt ezen dissonantiák egybe is tétettnek.

Az átmenetek szabálya egyik zen-nemből (Tonart a') másikba ez : ha amabban *x* a' tonica, 's a másikban *y* ; az *y*-ba *x*-bol úgy lehet átmenni, ha *x* dominansa *y*-nak, 's ennek felette az átmenetnél, ha a' melodia zenje Grundbass-a *Z*, azon zennek triássa tétessék reá, és ehez tétessék a' *z Z* főseptimája, 's a' *Z* felső octávája, is oda-tétetthetik ; de mindjárt az *y*-bai átmenettel félközzel szálljon a' fő septima, 's a' melodia zenje félközzel emelődjék.

Péld. Legyen *e* a' melodia zenje, 's a' tonica *c*; a' Grundbass *c* lesz, 's a' dominans accord *g*, a főseptimával *b* azután mindjárt *a*;

$$\begin{matrix} e & g & g \\ c & e & f \end{matrix}$$

a' melodia zen *e*-ből *f* lett, 's a' fő septima *c*, *b*-ből *a*; 's *c* az *F*-nek dominansa, az-az quintája, 's *a*-nak mint az *f* tertiájának Grundbassa *f*. Igy 3 keresztes *A* durból sept-accorddal az átmenet az 1 kereszttel kevesebbű *D* durra van; mert *D* az, a' minek quintája *A*. Szintúgy a' hol se *b* se kereszt, nincs septaccorddal az 1 *b* betűs *F*-re van, melynek dominansa *c*.

'S azon tonicának, melynek triassa feloldja a' septaccordot, dominánsa azon Grundbass, melynek triássához a' fő septima tétetik.

Jegyzés. GÖTHE azt irja. Die Sept ist der göttliche Führer, Vermittler der irdischen Natur mit der himmlischen; ist übersinnlich, führt in die Geisterwelt, und hat Fleisch und Bein angenommen, um den Geist vom Fleische zu befreyen; ist zum Tone geworden, um den Tönen Geist zu geben; und wenn sie nicht wäre, würden alle Töne in der Vorhalle sitzen bleiben. Die ætherischen Schwingen des Tones sind die Leiter, auf deren Stufen unsere Seele hinaufsteigt in die Wohnungen unsichtbarer Geister.

'S megemlitenddök következö régi az egész scaláról irtt német versek.

Den heiligen Glauben in Acht mir nimm!
Das sey dir o Mensch die ächte Prim.

Auch die Hoffnung erhalte gesund,
Sie ist auf der Scale Secund.

Zum göttlichen Willen kling o Herz,
In sparsamer Liebe die reine Terz.

Trifft Mühe dich und Arbeit hart,
So denk: dies ist die reine Quart.

Sey deinem Nächsten friedlich gesinnt,
Um stimme zu ihm die reine Quint.

So oft du Vertrauen auf Gott erweckst,
Stärke dich alsbald die harmonische Sext.

Auch wie ein Wunderbalsam-Recept,
Verehre des Unglücks schneidende Sept.

Sey mässig in Worten, Speis und Schlaf,
So ruft dich der Herr zur höheren Octav.

Atyafias accordoknak mondattnak a' Grundbass során számítva a' tertia (kicsi vagy nagy), vagy visszafelé a' sexta; szintúgy a' quinta, vagy visszafelé a' quarta.

'S ha a' Grundbass tertiánként, quartánként vagy sextánként megy; ott mind atyafiság van. De a' secundára 's septimára (mely visszafelé secunda) nézve; ha a' melodia secundát hág, vagy száll, 's annyit szállna a' Grundbassban az oktava 's quinta a' triásban, *parallelnek* mondatik, és ez nem szabad: olyankor az oktava egyet száll 's a' tertia hág elébb, 's azután quintává tétetik; 's a' leszállított septima octávára emelődik a' következő tactusban.

Ha a' Grundbass secundánként 's septimánként megy, nincs atyafiság: olyankor a' quinta annyit szállíttatik, a' mennyit hág a Grundbass; 's hogyha ez száll, 's az oktava helyt marad, a' következőkben közbe járo egyítő septimává tétetik.

Mikor a' quarta a' melodiában egy lépcsővel száll, a' subdominans helyett a' Grundbass lehet a' dominans is.

Accord megfordításának mondatik: ha péld. *C* a tonica 's a fölebbi *C e g c*-ben a' tertia tétetik alol, vagy a' quinta; az első mondatik *sext accordnak*, a' második *quart sextnek*. —

A' Grundbassról 's accordjairól *ultra crepidam* olvasásbol irattak, 's bár a' *dur* és *moll* tiszta határozatáról többet lehetne olvasni.

Az accordra nézve nincs baj: mert a' nagy tertia a' triasba *dur-accord* 's a' kicsi moll: de kérdés, minden accord nélkül melyik melodia dur 's melyik moll? Ha a' tonicán kezdődik, 's nagy tertiája van a' hágásba szállásba *dur;* 's ha kicsi tertia 's nagy septima a hágásba, 's kicsi tertia a' szállásba is moll; azért mondatik a' septima *vezér hangnak;* mivel többnyire a' tonica benne van a' kezdetnek legalább bassusában, 's a' végzetben is, tehát a' septimára kell figyelni (a' hágásban legalább). Az egészben pedig a' durt jellemzik a' dur-accordok, 's a' mollt a' moll-accordok, ámbár a' mollban is lehet vagy egy különösen a' végén.

(Maros-Vásárhely) Közli: *Gulyás Károly.*

A Mathematikai és Physikai Társulat huszadik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 7-én kibocsátott meghivójára a Mathematikai és Physikai Társulat XX. rendes közgyűlését 1913. évi április hó 17-én d. u. $5^1/_2$ órakor tartotta meg, a melyen nehány vendégen kívül a következő tagok vettek részt:

Anderkó Aurél, Bálint Elemér, Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Bricht Lipót, Bogyó Samu, Bozóky Endre, Csemez József, Egerváry Jenő, br. Eötvös Loránd, Fejér Lipót, Fekete Jenő, Fekete Mihály, Fröhlich Izidor, Geöcze Zoárd, Goldziher Károly, Grosschmid Lajos, Grúber Nándor, br. Harkányi Béla, Hasenauer Andor, Holitsch Pál, Hoor Mór, Incze László, Klein Magda, König Dénes, Konya Rudolf, Kopp Lajos, Kövesligethy Radó, Küszler Elly, Lakits Ferencz, Lévay Ede, Losonczy Lajos, Lukács Ferencz, Mattyasóvszky Kasszián, Mikola Sándor, Oberle Károly, Ortvay Rudolf, Palatin Gergely, Pécsi Albert, Pekár Dezső, Polczer Kálmán, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Raffmann Jákó, Rátz László, Roboz Miksa, Romsauer Lajos, Rucsinszki Lajos, Rybár István, Sárközy Pál, Schwarz Ilona, Schwartz Magda, Simon László, Sós Ernő, Steiner Lajos, Suták József, Szabó Péter, Szűcs Adolf, Terlanday Emil, Tolnay Jenő, Tóth Aladár, Tőtössy Béla, Ujj Gyula, Vuk Mihály, Winter József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1913-ra.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. A tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

Br. Eötvös Loránd elnök a közgyűlést a következő szavakkal nyitja meg.

Tisztelt Mathematikai és Physikai Társulat!

Huszadik közgyűlésünkre jöttünk össze. Melegen üdvözlöm az itt megjelenteket. De ez az óra, melyben körünkben látjuk távolabb lakó kedves társainkat is, mégsem lehet a zavartalan örömnek órája.

Nagy okunk van a szomorúságra.

Csak egy hét mult el azóta, hogy König Gyulát utolsó pihenő helyére kisértük s örökre búcsút mondtunk neki, társulatunk egyik elnökének, alapítójának.

Alapító! ez az egy szó fejezi ki legteljesebben azt, hogy mi volt ő nekünk, nem csupán azért, mert bölcsességével, döntő tanácsával kezdettől fogva részt vett társulatunk szervezésében és fejlesztésében.

Többet, százszorta többet tett ő ennél.

Világraszóló tudományos munkásságával, tanítói buzgóságával és termékenyítő erejével valóban ő rakta le az alapot, melyen hazánkban a mathematikának erős vára épülhetett s társulatunk abban életre képessé vált.

Mathematikusaink voltak már ő előtte is, a Bolyaiak világhírét magyar tudós túlszárnyalni nem fogja egyhamar, de csak az Isten különös kegyének vagy a véletlen szerencsének tudhatjuk be azt, hogy a tudomány egének e fényes csillagai épen nekünk magyaroknak jutottak.

Ma a mathematika fejlődése magyar földön már nem a véletlen szerencse dolga. Tudós munkások lelkes csoportja áll a kutatás mezején, s a munka, melyet az egyik kezd, a másik folytat, feltarthatatlanul halad előre. Azt, hogy ma nemcsak egyes mathematikusainkkal dicsekedhetünk, hanem évről-évre gyarapodó mathematikai iskolára mutathatunk, König Gyulának, az alapító mesternek köszönhetjük. Addig, a míg ez az iskola fennáll, a míg e társulat élni fog, róla, a mesterről, vezérről és szeretett jó barátról megfeledkezni nem fogunk.

*

A közgyűlést megnyitván, elnök a mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jelen ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére Klein Magda és Palatin Gergely tagtársakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Ünnepi ülésre készültem, midőn öt héttel ezelőtt választmányunk megbízásából tisztelt tagtársainkat Társulatunk huszadik rendes közgyűlésére meghívtam, és ime, ünnepi jelentésem gyászjelentéssé vált, a legnagyobb gyászé, a mely a Társulatot fennállása óta érte. Épen ma egy hete, hogy König Gyulát, a Mathematikai és Physikai Társulat egyik leglelkesebb megalapítóját és huszonegy éven át volt fáradhatatlan, buzgó alelnökét, utolsó útjára kísértük. Könnyes szem előtt a legragyogóbb tájkép is fátyolt ölt és így a gyásznak első napjaiban mi sem vagyunk képesek mást látni, mint vigasztalan veszteségünket, ama felemelő érzet nélkül még, melyet a jól betöltött, sikerekben gazdag élet ismerete vigasztalásul mégis nyujt. Más lesz hivatva e gazdag életet önök előtt teljes értékében feltárni, de a siratás órájában is mulasztás volna meg nem emlékeznünk arról, hogy a mathematika számos és nehéz ösvényeibe mélyen vágta nyomait s hogy végre a philosophia vagy az emberi gondolkodás legcsúcsára emelkedett s onnan oly kilátást élvezett és számunkra is megnyitott és leírt, a melyet előtte többen sejtettek ugyan, de senki teljes tisztaságában nem ismert. Túl a hegyeken éles szeme belehatolt ama féltve őrzött rejtekekbe is, a melyekből a logikai gondolkodás merített. Hálásan gondolunk reá, hogy e nehéz, de vonzó tanulmányaival bennünket is megismertetett s hogy Társulatunknak, különösen pedig mathematikai tanulóversenyeink vezetésében és irányításában híven és kitartóan részt vett.

Végtisztességén Társulatunk igen sok tagja volt jelen és nevében Rados Gusztáv bucsúztatta. A Társulat hálásan és szeretettel és ha majd idővel fájdalma enyhült, jogos büszkeséggel fogja megőrizni emlékét mindenha.

A XIX. mathematikai tanulóversenyt 1912 október 12-én tartottuk meg. A versenyzők száma nem volt nagy, 47, de figyelemre méltó, hogy ezek háromnegyed része beadott dolgozatot s hogy a két díjazotton kívül három dolgozat dicséretre is volt méltó. Az első díjat Szegő Gábor, a másodikat Neményi Pál nyerte el.

A Mathematikai és Physikai Lapok XXI. kötete 25 ív terjedelemben jelent meg nyolcz mathematikai, kilencz physikai tárgyú értekezéssel. Az év folyamán kilencz előadó ülésünk volt, melynek anyaga szintén egyenletesen oszlott meg a két tudományszak között.

Társulatunk a XXI. éve végén 387 tagot számlált, köztük 187 budapesti és 200 vidéki tagot; az előfizetők száma 118. Az utolsó évben tehát a tagok száma tízzel fogyott, ellenben az előfizetőké héttel szaporodott. A tagok között van 15 alapító tag és 4 hölgytag.

Anyagi helyzetünk javítása czéljából folyamodványt szerkesztettünk a Vallás- és Közoktatásügyi Miniszter úrhoz évi segélyért, de eddig nem tartottuk időszerűnek e kérvény beadását. Jelenleg oly miniszterünk van, a ki saját tanulmányaiban mathematikai módszereket felhasznált és így inkább remélhető, hogy Társulatunk tevékenységét meg fogja értékelni.

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya és annak Mathematikai és Természettudományi Bizottsága az elmult évben is nagylelkűen gondoskodott rólunk, 2000 korona segélyt írván költsogvetésében javunkra. Hálánk kifejezésével kérjük, hogy segítségét tőlünk ezután se vonja meg.

Az a nagy veszteség, a melyet bejelentettem, nem az egyetlen, a mely

BEVÉTEL	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1911. évi zárszámadási maradvány	1307	44	1307	44
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	1130	—
Hátralékos tagdijak	1800	—	1004	—
Alapító tagdijak	—	—	620	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	100	—	—	—
Kamatok	550	—	590	10
Előfizetési dijak	700	—	941	40
Államsegély	2000	—	—	—
Nyomtatványokból	250	—	—	—
Vegyesek			4	—
			7596	94

Vagyon

VAGYON	1911. év végén		1912. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	880	—	1500	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2600	—	2600	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Forgó tőke:				
Készpénz	57	40	94	82
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	317	24	1032	20
Első hazai takarékpénztári betét	—	—	200	—
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	884	—	432	—
Tagdijhátralékok	3500	—	4000	—
Föl nem vett hirdetési dij	—	—	100	—
Nyomtatványokban	700	—	700	—
	19195	44	20915	82

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk

A választmány részéről:

Beke Manó dr. s. k. *Rátz László* s. k.

1913. évi költség-

BEVÉTEL	1912. évi		1913. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárszámadási maradvány	1307	44	1807	82
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	2400	—
Hátralékos tagdijak	1800	—	1800	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	100	—	200	—
Előfizetési dijak	700	—	800	—
Államsegély	2000	—	—	—
Nyomtatványokból	250	—	200	—
Kamatok	550	—	700	—
Hiány	535	06	422	35
	11642	50	10330	17

ırszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek a mult évre	4685	75	2400	—
a folyó évre	3200	—	—	—
Irói tiszteletdijak a mult évre	798	75	666	—
a folyó évre	2100	—	1157	50
Expeditió- és irodai költségek	700	—	693	62
Középiskolai tanulóverseny	158	—	158	—
Vegyesekre	—	—	94	—
Az alaptőkéhez csatoltatott	—	—	620	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			94	82
b) takarékp. betétben			1713	—
			7596	94

ıérleg.

TEHER	1911. év végén Kor.	fill.	1912. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	4685	75	3701	17
Irói tiszteletdijak	798	75	769	—
Tiszta vagyon	13710	94	16445	65
	19195	44	20915	82

udapesten, 1913. évi április hó 15-én.

A közgyülés részéről:

Balog Mór s. k. *Bogyó Samu* s. k.

lőirányzat.

KIADÁS	1912. évi előirányzat Kor.	fill.	1913. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai költség a mult évre	4685	75	3701	17
a folyó évre	3200	—	3200	—
Irói tiszteletdijak a mult évre	798	75	769	—
a folyó évre	2100	—	2000	—
Expeditió- és irodai költségek	700	—	500	—
Középisk. tanulóverseny	158	—	160	—
	11642	50	10330	17

Privorszky Alajos
pénztárnok.

ért. Elköltözött sorainkból váratlanul Lengyel Béla választmányi tag, a ki a chémiának több, a physikával rokon ágát művelte, továbbá Feichtinger Győző, Társulatunknak sok éven át buzgó pénztárnoka, továbbá Biróné Szupper Márta, Hajnal Márton, Kelemen Ignácz és Kronich Lénárd tagtáisaink is. Híven fogjuk megőrizni emléküket.

Folyóiratunk munkatársai fogadják végre titkár- és szerkesztőtársam nevében is szíves közreműködésükért hálás köszönetünket. Megvallom, nem minden irígység nélkül néztem némelykor kedves szerkesztőtársamnak kézirattól duzzadó zsebét, de most, e pillanatban magam is megelégedett vagyok, mert az idei évfolyam physikai anyagának legalább is fele már biztosítva nyomdában van. És ezzel kérem a tisztelt Közgyűlést, hogy jelentésemet tudomásul venni méltóztatnék.

Budapest, 1913 április 17-én.

Kövesligethy Radó
ügyvivő titkár.

A jelentés tudomásul van.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1913-ra és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Pénztárnok előterjeszti az alábbi zárszámadást, vagyon-mérleget és költségelőirányzatot, melyet a közgyűlés tudomásul vesz, illetőleg elfogad.

Meghallgatván a pénztárvizsgáló-bizottság jelentését, a közgyűlés pénztárnoknak megadja a felmentvényt.

5. Tisztikar és választmányi tagok választása.

A tisztikarba König Gyula elhúnyta folytán a mathematikusok köréből egy alelnök választandó, betöltendő továbbá Lengyel Béla elhalálozása folytán az egyik választmányi tagsági hely is. Az alapszabályok 20. §-a értelmében a választmányból kilépnek: Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László és Tőtössy Béla választmányi tagok. Az ő helyük is választással töltendő be.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Goldziher Károly elnöklete mellett Grosschmid Lajos és Szűcs Adolf tagtársakból álló szavazatszedő-bizottságot küldi ki.

A választás megejtése után a bizottság elnöke jelenti az ujonnan megnyitott közgyűlésnek, hogy 54 szavazat közül 53 szavazattal Rados Gusztáv választatott alelnökké s hogy Fröhlich Izidor 53 szavazattal, Klupathy Jenő 54 szavazattal, Rátz László és Tőtössy Béla egyenként

53 szavazattal újra választatott választmányi taggá. A megüresedett választmányi tagsági helyre Mikola Sándor választatott 41 szavazattal.

Rados Gusztávnak alelnökké történt választásával megüresedett az egyik titkári állás is. Az elrendelt szavazás eredménye, hogy Fejér Lipót választatott 49 szavazattal titkárrá.

Elnök üdvözli az új alelnököt és titkárt és az ujonnan választott választmányi tagokat, Rados Gusztáv pedig az ujonnan választottak nevében is köszönetet mond választásáért.

6. Indítványok.

Indítvány nem adatván be, a napirend utolsó pontja elesik.

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kéri fel és a közgyűlést berekeszti.

*

A közgyűlést rendes előadó-ülés követte.

A Mathematikai és Physikai Társulat XX. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 18-án tartott XX. tanulóversenyre Budapesten 67, Kolozsvárt 1 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen felvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 41, Kolozsvárt 1 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma 21-gyel, a beadott dolgozatok száma 7-tel nőtt.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1 Bebizonyítandó, hogy

$$(1.2.3\ldots n)^2 > n^n$$

ha n bármely 2-nél nagyobb egészszám.

2. Legyen O és O' egy koczka két szemben lévő csúcsa. Felezzük a koczka azon 6 élét, melyek az O és O' csúcsok egyikén sem mennek keresztül. Bebizonyítandó, hogy e felezőpontok egy síkban feküsznek és csúcsai egy szabályos hatszögnek.

3. Legyen az a, b pozitív egész számok legnagyobb közös osztója d, az a', b' pozitív egészszámoké d'. Bebizonyítandó, hogy az

$$aa',\ ab',\ ba',\ bb'$$

számok legnagyobb közös osztója dd'.

A versenydolgozatok a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Kőnig Dénes műegyetemi magántanár úrnak adattak ki. A teljes biráló bizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a XX. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbirálása ügyében 1913 okt. 31-én tartott bizottsági ülésről.

Jelen vannak: Rados Gusztáv elnök, Fejér Lipót, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Szekeres Kálmán, Zemplén Győző és Kőnig Dénes előadó.

A tanulóversenyen Budapesten 67, Kolozsvárt 1 jelentkező vett részt. A beadott dolgozatok száma Budapesten 41, Kolozsvárt 1.

Kőnig Dénes előadó jelentésének meghallgatása után a bizottság a következő egyhangú határozatot hozza:

Az első díjra *Radó Tibort*, a budapesti VIII. ker. főreáliskolában Priváry József tanítványát, ajánlja, ki dolgozatában mind a három tételt helyesen, egyszerűen és szabatos fogalmazással oldotta meg.

A második díjra érdemesnek *Filep Lajosnak*, a budapesti IV. ker. főreáliskolában Kopp Lajos tanítványának, dolgozatát itéli. Bár fogalmazása kivánni valót hagy hátra, a dolgozat mindhárom feladatnak helyes megoldását adja és különösen a második példa kidolgozása eleven térbeli szemlélőképességéről tanuskodik.

Végül dicsérettel említi fel a bizottság *Madarász Antalnak*, a budapesti kegyesrendi főgymnáziumban Hatvany Ede tanítványának dolgozatát, mely szintén mind a három feladatnak, de kevésbé egyszerű módon való megoldását tartalmazza.

Budapest, 1913 október hó 31-én.

Kőnig Dénes — *Rados Gusztáv*
előadó. — elnök.

A f. évi november hó 6-én tartott választmányi ülés e jelentést helyeslőleg tudomásul vette és a javaslathoz egyhangulag hozzájárulván, azt határozattá emelte.

A nyomban erre tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, a mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek néhány üdvözlő szóval kiosztotta a jutalmat, kérve őket, hogy volt tanáruknak is vigyék át a Társulat üdvözletét.

Egyben megemlékezett elnök Vályi Gyula elhúnyt tagtársról is.

A Mathematikai és Physikai Társulat XX. tanulóversenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Radó Tibor dolgozata.

1. Bebizonyítandó, hogy:

$$(1.2\ldots n)^2 > n^n,$$

ha n 2-nél nagyobb egészszám.

Kidolgozás.

Segédtétel: Ha $n > k > 1$ pozitív egész számok, akkor

$$(n-k+1)\,k > n.$$

A föltétel szerint: $\left.\begin{array}{l} n-k>0 \\ k-1>0 \end{array}\right\}$ a szorzat tehát:

$$nk-k^2-n+k>0,$$

honnan tényleg:

$$-n+kn-k^2+k>0,$$

vagyis

$$nk-k^2+k>n.$$

Főtétel: $n>2$, tehát k lehet $2, 3\ldots, n-1$. Ekkor tehát:

$$2(n-1)>n \qquad (1)$$
$$3(n-2)>n \qquad (2)$$
$$4(n-3)>n \qquad (3)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(n-2)\,3>n \qquad (n-3)$$
$$(n-1)\,2>n. \qquad (n-2)$$

Ezen egyenlőtlenségek szorzatából:

$$[2.3\ldots(n-2)\,(n-1)]^2>n^{n-2}.$$

Mindkét oldalon n^2-tel szorozva:

$$(1.2.3\ldots(n-1)\,n)^2>n^n.$$

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

2. Legyen O és O' egy koczka két szembenfekvő csúcsa. Felezzük a koczka azon 6 élét, melyek az O és O_1 csúcsok egyikén sem mennek át. Bebizonyítandó, hogy e felezőpontok egy síkban feküsznek és csúcsai egy szabályos hatszögnek.

Kidolgozás.

Ha a koczka csúcsai O, O', $B_{i\,(i=1\ldots 6)}$, $A_{i\,(i=1\ldots 6)}$ az egyes felezőpontok, akkor:

$$O'A_1B_1\Delta \cong O'B_1A_2\Delta,$$

mert derékszögűek, egyik oldal közös és $A_1B_1=A_2B_1$ az él felé. Így tehát:

$$A_1O'=A_2O'.$$

Továbbá $O'A_1B_1\Delta \cong O'A_6B_5\Delta$, mert $O'B_5=O'B_1$, $B_5A_6=A_1B_1$ és derékszögűek, tehát:

$$O'A_6=O'A_1$$

s így kapjuk végül, hogy

$$A_1O'=A_2O'=\cdots=A_6O'.$$

E szerint az A_i pontok egy O' középpontú gömbön feküsznek.

Hasonló módon kapjuk, hogy:

$$OA_1=OA_2=\cdots=OA_6.$$

Vagyis az A_i pontok egyúttal egy O gömbön is rajta vannak, rajta lesznek tehát O és O' metszésvonalán, egy körön is. A kör pedig síkidom, tehát az A_i pontok *egy síkban vannak.*

Megrajzolva koczkát, észrevesszük, hogy:

$$A_2A_3 \parallel B_1B_3, \text{ mert } A_2B_2 : B_1B_2=B_2A_3 : B_2B_3$$
$$A_5A_6 \parallel B_4B_6 \quad « \quad B_5A_6 : B_5B_6=B_5A_5 : B_5A_4.$$

De $B_1B_3 \parallel B_4B_6$ tehát: $A_2A_3 \parallel A_5A_6$.

Ugyanígy kapjuk, hogy $A_1A_2 \parallel A_4A_5$ és $A_1A_6 \parallel A_3A_4$. Következőleg a hatszög szögei egyenlők. Továbbá:

$$A_1B_1A_2\Delta \cong A_2B_2A_3\Delta \cong \cdots = A_6B_6A_2\Delta,$$

mert derékszögűek és $A_1B_1=\cdots=B_6A_2=$ a fél koczkaél. Tehát:

$$A_1A_2=\cdots=A_6A_1,$$

azaz a hatszög szögei és oldalai egyenlők, tehát *szabályos.*

3. Legyen az a, b pozitív egész számok legnagyobb közös osztója d, az a, b' poz. egész számoké d'; bebizonyítandó, hogy az

$$aa', bb', ba', bb'$$

számok legnagyobb közös osztója dd'.

Kidolgozás.

A föltétel szerint:

$$a = \alpha d \quad b = \beta d \quad a' = \alpha' d' \quad b' = \beta' d',$$

hol α és β, illetve α' és β' relatív prímek. Mármost:

$$aa' = \alpha\alpha' dd' \quad bb' = \beta\beta' dd' \quad ba' = \alpha'\beta dd' \quad ab' = \alpha\beta' dd'.$$

Ha p és q legnagyobb közös osztóját jelöljük $[p, q]$-val, akkor:

$$[aa', ab', ba' bb'] = \big[[aa', ab'], [ba', bb']\big].$$

De $\left.\begin{matrix}[aa', ab'] = \alpha dd' \\ [ba', bb'] = \beta dd'\end{matrix}\right\}$ mert α' és β' relatív prímek. Tehát:

$$\big[[aa', ab'], [ba', bb']\big] = dd',$$

mert α és β is relatív prímek. Vagyis:

$$[aa', ab' ba', bb'] = dd'\cdot$$

II. Filep Lajos dolgozata.

1. feladat megoldása.

$$a.b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} =$$

Innen látható, hogy egyenlő összegű tényezők szorzata közül az a nagyobb, a hol a tényezők különbsége kisebb.

$$(1.2.3\ldots n)^2 = \left[(1.n)\ 2\ (n-1)\ 3\ (n-2)\cdots \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^2 >$$

$$> \left[n^{\frac{n}{2}}\right]^2 = n^n.$$

Ha n páratlan, akkor a középső tag $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ helyett $n^{\frac{1}{2}}$-t, tehát nála kisebbet írtam a $>$ jel után. Tehát ez sem vonja el a bizonyítás érvényességét.

2. feladat megoldása.

Bontsuk a koczkát nyolcz egyenlő koczkára, úgy hogy a kis koczkák csúcsai vagy az adott koczka csúcsán legyenek, vagy élének, oldallapjának közepén, vagy beleessenek az adott koczka középpontjába.

Legyen két ilyen szomszédos kis koczka

$$SNTDEMKV$$

és

$$PFRQEMKV;$$

(O, O' nem csúcsuk) (de (SNO') és (PQO) egy-egy egyenesen van). Helyezzük az utóbbit az előbbibe, úgy hogy MV-be FD-be jusson, akkor EE-ben KK-ban marad (KEF) (DEK) összeesik, tehát eredeti helyzetében egy síkban volt. Végül $DE=EF$.

D és F pedig, ha a koczkákat úgy választottuk. hogy SNO' egy élen legyen PQO egy másik élen legyen, olyan él felező pontja, mely nem megy át sem O-n, sem O'-n. E szerint két szomszédos oldaláról tudjuk a keresett idomnak, hogy egyenlő és hogy egy síkban van. Ámde ED szomszédos DC-vel, DC CB-vel és így tovább . . . Tehát e távolságok egymásután mind egyenlők és egy síkban vannak, továbbá a K ponttól $EF=EK=FK=ED=DK$ stb. távolságban vannak.

E szerint a kérdéses idom nem is lehet más, mint szabályos hatszög

3-dik feladat megoldása:

$$a=d\alpha \qquad b=d\beta$$
$$a'=d'\alpha' \qquad b'=d'\beta'$$
$$aa'=dd'\alpha\alpha' \qquad \alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta' \text{ poz. egész szám}$$
$$ab'=dd'\alpha\beta'$$
$$a'b=dd'\alpha'\beta$$
$$bb'=dd'\beta\beta'$$

világos, hogy mind a négy számnak tényezője dd'.

De, hogy ne dd' legyen a legnagyobb közös többes, kell, hogy e négy szám ne legyen relatív prím szám: $\alpha\alpha'$ $\alpha\beta'$ $\alpha'\beta$ és $\beta\beta'$. Ha ezek nem prím számok, úgy egy pozitív C számot tartalmaz, vagy

α és β, ez nem lehet, mert $\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}$ nem egyszerűsíthető,

vagy α' és β' ez sem lehet, mert $\frac{a'}{b'}=\frac{\alpha,}{\beta,}$ ez sem egyszerűsíthető,

vagy $\alpha\beta'$ és vagy $\left\{\begin{matrix}\beta\\ \alpha'\end{matrix}\right.$ ez sem lehet előbbi esetek miatt,

vagy $\alpha'\beta$ és vagy $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta'\end{matrix}\right.$ ez sem lehet, előbbi esetek miatt.

Kimutatás

az 1913. évi január hó 1-től deczember hó 31-ig befolyt díjakról és előfizetési díjakról.

Alapító tagsági díjat fizetett: Berkes Imre 200 kor, Összesen ... 200 K.

Rendes tagsági díjat fizettek:

1905. évre: Héjas Endre 8 kor. Összesen ... 8 K.

1906. évre: Héjas Endre 2 kor., Molnár Sándor 6 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 14 K.

1907. évre: Hronyecz dr. György 6 kor., Molnár Sándor 6 kor. Összesen ... 12 K.

1908. évre: Aliquander Lajos 6 kor., Berkes Imre 10 kor., Büky Aurél 6 kor., Erdődy Imre 10 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Ferenczy József 6 kor., Hatvani Ede 6 kor., Hronyecz György dr. 6 kor., ifj. Konkoly Thege Miklós dr. 6 kor., Molnár Sándor 6 kor., Vater József 10 kor. Összesen ... 78 K.

1909. évre: Aliquander Lajos 6 kor., Berkes Imre 10 kor., Bozmánszky Gyárfás 6 kor., Büky Aurél 6 kor., Ellend József 6 kor., Erdődy Imre 10 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Ferenczy József 6 kor., Hatvani Ede 6 kor., Hronyecz György dr. 6 kor., Képessy Imre 10 kor., ifj. Konkoly Thege Miklós dr. 6 kor., Kunszt János 6 kor., Molnár Sándor 6 kor., Skopál István 10 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Vater József 10 kor. Összesen ... 122 K.

1910. évre: Aliquander Lajos 6 kor., Balog Mór 10 kor., Berkes Imre 10 kor., Bodola László 6 kor., Bozmanszky Gyárfás 6 kor., Büky Aurél 6 kor., Czakó Adolf 10 kor., Czuczy Emil 6 kor., Ellend József 6 kor., Erdődy Imre 10 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Haar Alfréd dr. 6 kor., Hatvani Ede 6 kor., Hronyecz György dr. 6 kor., ifj. Konkoly Thege Miklós dr. 6 kor., Küssler Elly 10 kor., Kunszt János 6 kor., Molnár Sándor 6 kor., Selényi Pál dr. 10 kor., Skopál István 10 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Vater József 10 kor. Összesen ... 170 K.

1911. évre: Aliquander Lajos 6 kor., Beck Károly 6 kor., Beke Manó dr. 10 kor., Berkes Imre 10 kor., Bodola

László 6 kor., Bogyó Samu 10 kor., Bozmanszky Gyárfás 6 kor., Büky Aurél 6 kor., Czakó Adolf 10 kor., Dávid Lajos dr. 6 kor., Demeczky Mihály dr. 10 kor., Ellend József 6 kor., Erdődy Imre 10 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Fekete Mihály dr. 10 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Haar Alfréd dr. 6 kor., Hatvani Ede 6 kor., Havas Miksa 10 kor. Hronyecz György dr. 6 kor., Juckel Gyula 10 kor., Kiss Dénes 6 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., ifj. Konkoly Thege Miklós dr. 6 kor., Küssler Elly 10 kor., Kunszt János 6 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Makoldy Viktor 10 kor., Molnár Sándor 2 kor., Molnár Szaniszló 6 kor. Nagy Balázs 6 kor., Pecz Samu 10 kor., Purpriger István 6 kor., Riesz Frigyes dr. 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Selényi Pál dr. 10 kor., Skopál István 10 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Steiner Miklós 6 kor., Suták József dr. 10 kor., Spiegel István 10 kor., Szász Ottó dr. 6 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Tolnay Jenő 4 kor., Tőtössy Béla dr. 10 kor., Vater József 10 kor. Összesen ... ... 378 K.

1912. évre: Aliquander Lajos 6 kor., Anderkó Aurél dr. 10. kor., Barabás Jenő 6 kor., Bauer Mihály 10 kor., Beck Károly 6 kor., Benda Jenő 10 kor., Berkes Imre 10 kor., Bogyó Samu 10 kor., Bozmanszky Gyárfás 6 kor., Büky Aurél 6 kor., Csemez József 10 kor., Czakó Adolf 10 kor., Dávid Lajos dr. 6 kor., Demeczky Mihály dr. 10 kor., Dienes Pál dr. 10 kor., Dombay Nárczisz 6 kor., Ellend József 6 kor., Erdődy Imre 10 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Finkey József 6 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Fekete Mihály dr. 5 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Haar Alfréd dr. 6 kor., Habán Mihály dr., 10 kor., Hatvani Ede 6 kor., Havas Miksa 10 kor., Heuer Ede 10 kor., Hronyecz György dr 6 kor., Juckel Gyula dr. 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Király László 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., ifj. Konkoly Thege Miklós dr. 6 kor., Kunszt János 6 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Küssler Elly 10 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Makoldy Viktor 10 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Obláth Richárd 10 kor., Ortvay Rezső 6 kor., Pecz Samu 10 kor., Purpriger István 6 kor., Radó Simon dr. 10 kor., Riesz Frigyes dr. 6 kor., Romsauer Lajos dr. 10 kor., Rybár István dr. 10 kor., Salamon Ernő 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Selényi Pál dr. 10 kor., Skopál István 10 kor., Sós Ernő 10 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Spiegel István 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Steiner Miklós

6 kor., Suták József dr. 10 kor., Szász Ottó dr. 6 kor., Széky István 4 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Tolnai Jenő 10 kor., Tőtössy Béla dr. 10 kor., Vater József 10 kor., Walek Károly dr. 6 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zilahy László 6 kor. Összesen ... ... 575 K.

1913. évre : Ábrahám István 10 kor., Aliquander Lajos 6 kor., Anderkó Aurél dr. 10 kor., Barabás Jenő 6 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bartoniek Emil 10 kor., Bartoniek Géza 10 kor., Bauer Mihály 10 kor., Beck Károly 6 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bodócs István 2 kor., Bogyó Samu 10 kor., Bozmanszky Gyárfás 6 kor., Bozóky Endre dr. 10 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Csopey László 10 kor., Dávid Lajos dr. 6 kor., Deutsch Lajos 10 kor., Dienes Pál dr. 10 kor., Domonkos Kálmán 6 kor., Éber József 10 kor., Ellend József 6 kor., Eltscher Simon 6 kor., Emánuel László 6 kor., Farkas Gyula dr. 6 kor., Félegyházi Antal 6 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos dr. 10 kor., ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 kor., Gáti Béla 10 kor., Gidró Bonifácz 6 kor., Goldziher Károly dr. 10 kor. Haar Alfréd dr. 6 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Hang Dániel dr. 6 kor., Hasenauer Andor 6 kor., Hatvani Ede 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos dr. 10 kor., Jakucs István 6 kor., Jánosi Imre dr. 6 kor., Javorik János 6 kor., Jordán Károly dr. 10 kor., Juckel Gyula dr. 10 kor., Jónás Frigyes 6 kor., Kherndl Antal dr. 10 kor., Király László 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Kiss Gábor dr. 10 kor., Klatt Román 6 kor., Klug Lipót dr. 6 kor., Konkoly-Thege Miklós dr. 10 kor., Kopp Lajos dr. 10 kor., Korda Dezső 6 kor., Koren Dénes dr. 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kovács I. Kandid 6 kor., Kőnig Dénes dr. 10 kor., Kövesligethy Radó dr. 10 kor., Kronberger Ede dr. 10 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Lakits Ferencz dr. 6 kor., Lendvai Hugó 6 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Magdics Gáspár 6 kor.,Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Müller József 10 kor., Sz. Nagy Gyula 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Nyáry Béla 6 kor., Obláth Richárd 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pécsi Albert dr. 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Pék János 6 kor., Pogány Béla dr. 10 kor., Pólya György dr. 10 kor., Prokesch

Ignácz 6 kor., Purpriger István 6 kor., Rados Gusztáv dr. 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Rátz László 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Romsauer Lajos dr. 10 kor., Rybár István dr. 10 kor., Sárközy Pál 6 kor., Scholtz Ágost dr. 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Selényi Pál dr. 10 kor., Skopál István 10 kor., Spiegel István 10 kor., Steiner Lajos dr. 10 kor., Steiner Miklós 6 kor., Straub Sándor 10 kor., Suták József dr. 10 kor., Szabó József 6 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Szász Ottó dr. 6 kor., Székely Károly 6 kor., Szekeres Kálmán dr. 10 kor., Széky István 10 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Tolnai Jenő 10 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Tersztyánszky Sándor 6 kor., Tőtössy Béla dr. 10 kor., Ujj Gyula 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vajnóczky István 10 kor., Vámos Dezső 10 kor., Vater József 10 kor., Vörös Cyrill dr. 10 kor., Walek Károly dr. 6 kor., Walther Béla 6 kor., Weber Márton 6 kor. Závodszky Adolf 10 kor., Zemplén Győző dr. 10 kor., Zilahy László 6 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ... 1134 K.

1914. évre: Bartoniek Géza 10 kor., Bodócs István 2 kor., Kirchknopf András 6 kor., Kronberger Ede dr. 10 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Pap János 2 kor., Petry Gyula 6 kor., Riegl Sándor S. J. 6 kor., Scholtz Ágost dr. 4 kor., Szőke Béla 10 kor., Tolnai Jenő 10 kor., Walek Károly dr. 6 kor. Összesen ... 84 K.

1915. évre: Magdics Gáspár 6 kor., Pap János 4 kor., Petry Gyula 6 kor., Walek Károly dr, 6 kor., Összesen ... 22 K.

1916. évre: Walek Károly dr. 6 kor. Összesen ... 6 K.

Előfizetési díjat fizettek:

1908. és 1909. évre: Aradi áll. főreáliskola 20 kor. Összesen ... 20 K.

1910. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Miskolczi ref. főgimnázium 6 kor., Nagybányai áll. főgimnázium 6 kor., Sárospataki ref. főiskola könyvtára 10 kor. Összesen ... 32 K.

1911. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Nagybányai áll. főgimnázium 6 kor. Összesen ... 16 K.

1912. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Békéscsabai áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti VI. ker. állami tanítónőképzőintézet 10 kor., Budapesti X. ker. (tisztviselőtelepi) áll. főgimnázium 10 kor., Berger Ignácz és Tsa. 10 kor., Dési áll. főgimnázium 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Kaposvári áll. főgimnázium 10 kor., Kézdivásárhelyi kath. főgimnázium 10 kor., Kisujszállási ref. főgimnázium 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Máramarosszigeti ref. lyceum 10 kor., Mildner Ferencz 10 kor., Nagybányai áll. főgimnázium 6 kor., Szekszárdi állami főgimnázium 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgimnázium 10 kor., Zilahi ref. Wesselényi Kollégium 6 kor. Összesen … … … … … … … … … … … … … … 162 K.

1913. évre: Aradi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Bártfai áll. főgimnázium 10 kor., Békéscsabai ág. h. ev. Rudolf-főgimnázium 10 kor., Békéscsabai áll. fels. leányiskola 10 kor., Beregszászi áll. főgimnázium 10 kor., Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti kegyes tanítórend főnökségének könyvtára 10 kor., Budapesti IV. ker. közs. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti IV. ker. közs. főreáliskola 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. fels. leányiskola és leánygimnázium 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. tanítónőképző intézet 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti VIII. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Eőtvös-kollégium 10 kor., Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Budapesti magy. kir. tudomány-egyetem könyvtára 10 kor., Budapesti VIII. ker. felső kereskedelmi iskola (Vas-u.) 10 kor., Blancz József 10 kor., Budapesti székesfővárosi központi anyagszertár 10 kor., Budapesti IV. ker. (gr. Károlyi-utczai) polgári leányiskola 10 kor., Csikszeredai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Debreczeni ref. főgimnázium fizikai szertára 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Egri áll. főreáliskola 6 kor., Erzsébetvárosi áll. főgimnázium 10 kor., Érsekujvári közs. kath. főgimnázium 10 kor., Fogarasi áll. főgimnázium 10 kor., Győri áll. főreáliskola 10 kor., Gyulai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgimnázium 10 kor., Hajdúnánási ref. főgimnázium 6 kor., Harsányi Frigyes 10 kor., Hepke Berthold 10 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 10 kor., Karczagi ref. főgimnázium 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kecskeméti ref. főgimnázium 10 kor., Kézdivásárkelyi kath. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári egyetemi ábrázoló mértani intézet 10 kor., Kolozsvári kegyesrendi Kalazantinum 10 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Káposztás Pál 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 10 kor., Makói áll. főgimnázium 10 kor., Malackai zárdafőnökség 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Mezőberényi polgári iskola 10 kor., Mildner Ferencz 10 kor., Nagyenyedi Bethlen-főiskola könyvtára 10 kor., Nagyszebeni áll. főgimnázium 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Pozsonyi kir. kath. főgimnázium 10 kor., Podolini kegyesr. főgimnázium 10 kor., Privigyei kegyesr. főgimnázium 10 kor., Sepsiszentgyörgyi ref. főgimnázium 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 10 kor., Soproni ág. h. ev. lyceum 10 kor., Szászvárosi ref. Kún-kollégium 6 kor., Szakolczai kir. kath. főgimnázium 10 kor., Szamosujvári áll. főgimnázium 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgimnázium 10 kor., Szarvasi ev. tanítóképző intézet 6 kor., Székelyudvarhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári áll. fels. leányiskola 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgimnázium 10 kor. Összesen ... 686 K.

1914. évre: Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Malaczkai zárdafőnökség 10 kor. Összesen ... 20 K.

Összesen befolyt:

Tagdíjhátralékokból ...	1357 K.
F. és köv. évi tagsági díjakból ...	1246 K.
Előfizetési díjakból ...	936 K.
Összesen:	3539 K.

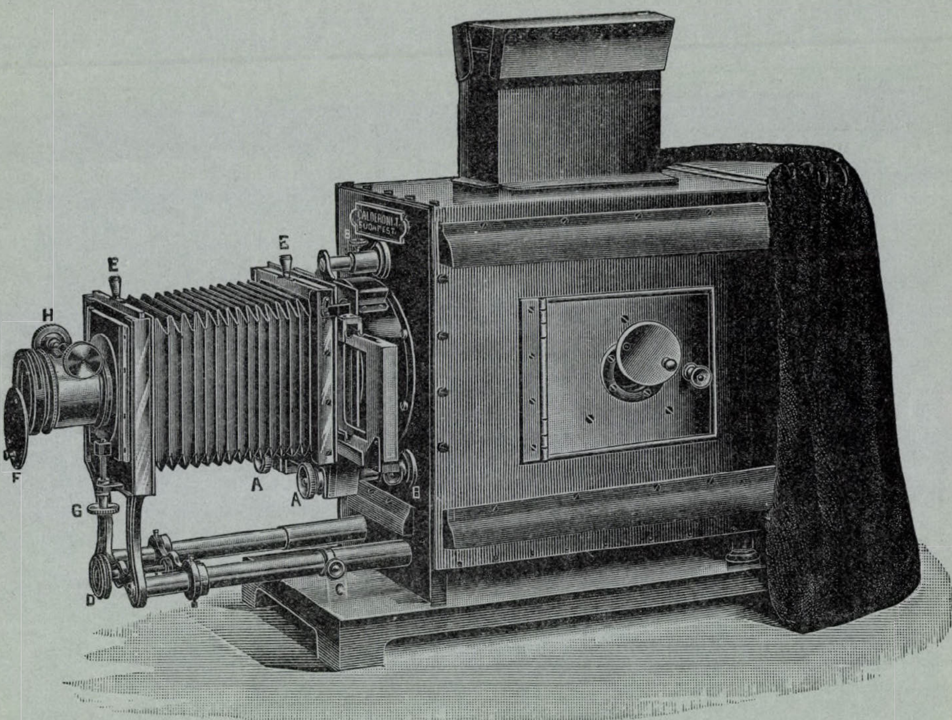
Budapesten, 1913. évi deczember hó 31-én.

Dr. Privorszky Alajos
pénztáros.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

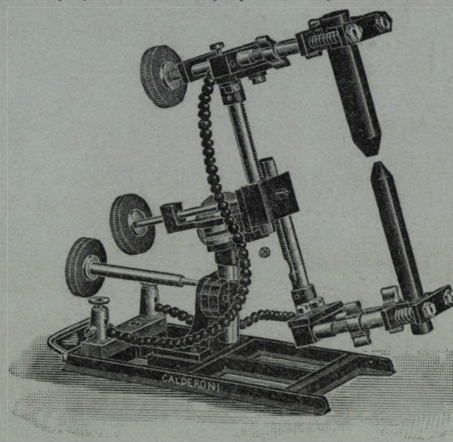
Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü aczéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivü vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.**—

Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van iglatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Elektromos ívlámpa legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Elektromos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	**45.**—	**65.**—	**90.**—	**145.**—	**200.**—	**240.**— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

Franklin-Társulat nyomdája